Teoremi richiesti con dimostrazione

1. **Numeri reali e complessi**: irrazionalità di √2 n-sime di un numero complesso.
2. **Limiti e continuità**:
   Teorema di unicità del limite,
   Teorema della permanenza del segno per successioni,
   Teorema di convergenza di successioni monotone limitate,
   Teorema di esistenza dell'estremo superiore (Weierstrass),
   Teorema di Bolzano-Weierstrass di esistenza di punti accumulazione,
   Teorema di continuità della funzione composta,
   Teorema degli Zeri,
   Teorema dei valori intermedi.
3. **Calcolo differenziale**:
   Teorema di continuità delle funzioni derivabili,
   Teorema della derivata di somma e prodotto e composizione di funzioni,
   Lemma di Fermat,
   Teorema di Lagrange,
   Test di monotonia,
   Teorema di Taylor-Peano.
4. **Calcolo integrale**:
   Teorema di integrazione per parti,
   Teorema di integrazione per sostituzione,
   Teorema della media integrale,
   1° e 2° Teorema fondamentale del calcolo integrale,
   Teorema di continuità della funzione integrale.
5. **Serie numeriche**:
   Teorema del Rapporto,
   Teorema della Radice,
   Teorema di Leibniz.

6. **Vettori ed elementi di geometria analitica del piano e dello spazio**:
   Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in Rn,
   formula della distanza tra un punto e un piano.

7. ~~**Curve nel piano e nello spazio, integrali di linea**: calcolo della lunghezza di una curva parametrica regolare.~~

Teoremi

Irrazionalità di √2 n-sime di un numero complesso

Dimostrazione $\sqrt{2} \notin Q$ $\longrightarrow$ $x^2 = 2 \longrightarrow x = \sqrt{2}$

Cioè $x^2 = 2$ non ha soluzioni nell'insieme dei numeri razionali.
Per assurdo supponiamo che $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Allora $2 = x^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$ è pari $\Rightarrow m^2$ è pari

Qualsiasi n lo sarebbe
ex: $2(5)^2 = 50$

interi

$\Rightarrow m = 2p$ con $p \in \mathbb{Z}$

QUINDI

$2n^2 = m^2 = 2n^2 = (2p)^2 \Rightarrow \cancel{2}n^2 = \cancel{4}^{2} p^2 \Rightarrow m^2 = 2p^2$

$\Rightarrow n$ è pari $\Rightarrow$ m ed n hanno in comune il fattore 2 poiché pari

Ma inizialmente si può considerare m e n primi tra loro

non hanno nessun fattore comune tra loro ma solo l'1 ex. 5 e 6

-> assurdo

Teorema di unicità del limite

Proprietà fondamentali dei limiti di successioni:
Unicità del limite

se $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ (finito) allora tale limite è UNICO

una stessa successione non può avvicinarsi a due limite diversi = se il limite esiste è unico

Dimostrazione unicità del limite
Se il limite esiste è unico

Supponiamo che una successione abbia due limiti $\lim_n a_n = e_1$

$\lim_n a_n = e_2$

Definizioni

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; / \; n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - e_1| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; / \; n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - e_2| < \varepsilon$

Sia $\varepsilon > 0 \quad 0 \leq |e_1 - e_2| = |e_1 - a_n + a_n - e_2| \leq$ usiamo la dis. triangolare del modulo

$\leq |e_1 - a_n| + |a_n - e_2| = |a_n - e_1| + |a_n - e_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

se $n \geq N_1(\varepsilon)$

$n \geq N_2(\varepsilon)$

Scegliendo $N(\varepsilon) := \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ ho che
nuovo

$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \begin{matrix} n \geq N_1(\varepsilon) \\ n \geq N_2(\varepsilon) \end{matrix} \Rightarrow |e_1 - e_2| < 2\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ per la proprietà archimedea dei n. razionali abbiamo

$|e_1 - e_2| = 0 \Rightarrow e_1 = e_2$

Proprietà archimedea
$|a - b| = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow \underbrace{a = b}_{\text{i due punti coincidono}}$

Teorema della permanenza del segno per successioni

5. Permanenza del segno

$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0 \\ \exists \lim a_n = \ell \end{array}\right\} \ell \geq 0$ se a_n è positivo il suo limite è positivo

per assurdo supponiamo che $\ell < 0$ e scegliamo

$\varepsilon := -\frac{\ell}{2} > 0 \rightarrow$ per def limite

Quindi $\exists N(\varepsilon) \geq 0 \;/\; \underline{\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon} = \ell - \frac{\ell}{2}$

$= \frac{\ell}{2} < 0 \rightarrow$ assurdo, $a_n \geq 0$ quindi $\ell \geq 0$

* da definiz. limite

Teorema di convergenza di successioni monotone limitate

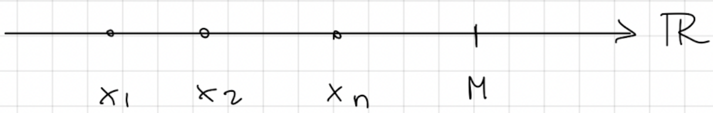
Teorema: convergenza delle successioni montone limitate

Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$

- Sia questa una successione monotona crescente (-> i numeri della succes. continuano a crescere) ..... $X_n \leq X_{n+1}$ .....

- E superiormente limitata
  Cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \underbrace{(-\infty, M]}_{\text{semiretta}} \quad \text{cioè: } X_n \leq M \quad \forall n \geq 1$$



Abbiamo una successione di numeri reali che parte da X1, ma c'è una barriera che non verrà mai oltrepassata

Allora $\exists \lim_{n \to +\infty} X_n \in \mathbb{R}$. lim sarà $\leq M$

DIM È sufficiente mostrare per il teorema di completezza di R che la successione è di Cauchy

Procediamo per assurdo
Supponiamo che {X_n} non sia di Cauchy

Proprietà di Cauchy

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

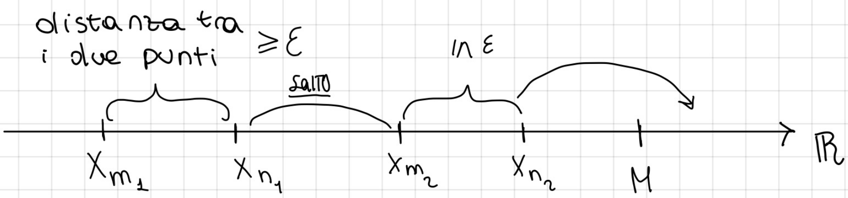
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \geq 0 \;/\; n, m \geq \underline{N(\varepsilon)} \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Negare Cauchy

due indici

$$\exists \varepsilon > 0 \quad / \; \forall N \geq 1 \;\; \exists \, n_N, m_N \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| \geq \varepsilon$$

(La successione parte da 1 ma è un valore che abbiamo deciso noi)



Costruiremo coppie di successioni tutte a distanza > di epsilon in modo che ogni intervallo sia disgiunto dall'altro. A un certo punto supereremo la barriera M. (non più superiormente limitata)

Possiamo sempre supporre che l'indice di tipo m_N < n_N così per la **monotonia** avremo che $\boxed{x_{m_N} \leq x_{n_N}}$

E il modulo di $\quad |x_{n_N} - x_{m_N}| \geq \varepsilon$

$$x_{n_N} - x_{m_N} = |x_{n_N} - x_{m_N}| \geq \varepsilon$$

$$\underline{x_{n_N} \geq x_{m_N} + \varepsilon} \longleftarrow \text{si salta almeno di } \varepsilon$$

Visto che "$/ \forall N \geq 1$" Posso scegliere N a piacimento

$N = 1 : \exists \; n_1 > m_1 \geq 1 \,/\, x_{n_1} \geq x_{m_1} + \varepsilon$ *

Scelgo N = al più grande degli indici precedenti: $N = n_1$

• NEGO CAUCHY (N = al più grande indici preced.)

$N := n_1 : \exists \; n_2 > m_2 \geq n_1 \,/$

$x_{n_2} \geq x_{m_2} + \varepsilon \geq$ Per monotonia

$\geq x_{n_1} + \varepsilon$ Utilizzo questa

$x_{m_2} \geq x_{n_1}$
poichè $m_2 \geq n_1$
(e per la monotonia)

$\geq x_{m_1} + \varepsilon + \varepsilon$

$= x_{m_1} + 2\varepsilon$

metto n1 al posto di m2, c'è un salto di ε (diminuisce) uso la 1° disuguaglianza *

Iterando (ripetendo all'infinito questo procedimento)

$N_{k+1} := n_k \longrightarrow$ più grande degli indici trovati al passo precedente

$x_{n_k} \geq \dots \geq x_{m_1} + k \cdot \varepsilon \qquad \forall k \geq 1$

① Salto di ε
② 2ε
③ al passo k saltiamo di $k\varepsilon$

hanno tutti lunghezza almeno ε.

Mandiamo k all'infinito. Per la proprietà di monotonia dei limiti:

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} \geq \lim_{k \to +\infty} (x_{m_1} + k\varepsilon) =$$

$$= x_{m_1} + \overset{\varepsilon \text{ volte}}{\varepsilon} \cdot \left(\lim_{k \to +\infty} k \right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = +\infty$$

ASSURDO perchè la $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è per ipotesi superiormente limitata

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è di Cauchy e quindi convergente in $\mathbb{R}$.

Teorema di esistenza dell'estremo superiore (Weierstrass)

Dimostrazione **teorema di Weierstrass**

continua

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

valgono x tutta f

Allora esistono punti di massimo e minimo globali di f su [a,b] cioè $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$
Tali che

minimo massimo

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) =:$$

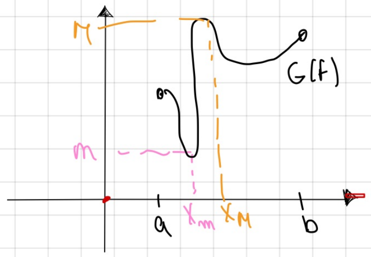
X_m è il punto di minimo, m è il valore minimo;
X_M è il punto di massimo, M è il valore massimo di f.
In altre parole

tra i valori di f

m= Min Im(f) ← valori che assume f nel suo dominio
M= Max Im(f)

L'immagine sono i valori sull'asse y

$$Im(f) = \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a,b] \} \text{ immagine di } f$$



Ci sarà un punto dove assume valore minore

$y=f(x)$

Come si dimostra: proviamo l'esistenza del massimo

Sia $M := \sup Im(f) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ per le proprietà dell'estremo superiore

$$\exists\, y_n \in Im(f) : y_n \to M \text{ per } n \to +\infty$$

rette orrizzontali (asse y)

In corrispondenza sia $x_n \in [a,b] : f(x_n) = y_n \quad \forall n \geq 1$

rette verticali (asse x)

(Se $y_n \in Im$,'immagine è formata dai valori che la f assume)

Ma la successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ è un insieme limitato e infinito

contenuto nell'intervallo [a,b]

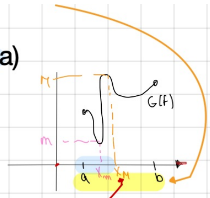
Perché possiamo sempre scegliere gli Y_n tutti diversi fra loro

Quindi possiamo applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass all'insieme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\exists\, x_M \in [a,b]$ di accumulazione per $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

valore max

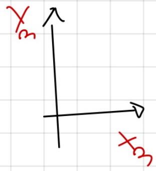
Esisterà una sotto successione (formata da alcuni punti di quella di partenza)



$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sottosuccessione

$x_{n_k} \neq x_M \quad \forall k \geq 1$ tale che $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x_M$

si forma in corrispondenza di x_M



Cosa vuol dire per la funzione di partenza:

$M = \lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) =$

$y = f(x) \to y_m = f(x_m)$

Utilizziamo il fatto che f è continua nel punto X_M

$= f(\lim_{k \to +\infty} x_{n_k}) = f(x_M)$ il limite della f in quel punto è uguale alla f valutata in quel punto $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Così $f(x_M) = M$

quindi $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \in Im(f)$ M= estremo superiore dei valori che f assume nell'intervallo

M appartiene all'immagine di f essendo il valore di f nel punto X_M

Quindi $M = Max\, Im(f)$

Abbiamo dimostrato che l'estremo superiore è il massimo dell'immagine: punto di massimo

Controesempio 1

$f: (0,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) := \frac{1}{x} \quad x \in (0,1]$

(0,1] è limitato ma non chiuso, e f non è limitata (non ammette massimo) infatti

$\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$ asintoto verticale

$\Rightarrow \sup Im(f) = \sup_{x \in (0,1]} \frac{1}{x} = +\infty$ non super. limitata

estremo superiore

anche se f è continua $f \in C((0,1])$ ma non è sup. lim.

Controesempio 2

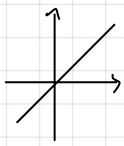
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

insieme f continue in $\mathbb{R}$

$f \in C(\mathbb{R})$ ma il dominio di f, $\mathbb{R}$, non è limitato

e f non è sup limitata

la f. non ammette massimo $\longrightarrow$



G(f) non limitato

Dimostrazione teorema Bolzano-Weierstrass

Dimostrazione teorema Bolzano-Weierstrass

lezione 9

ipotesi

$E \subseteq \mathbb{R}$ limitato
$\#E = \infty$ ⟶ es. $[0, 1]$ ⟶ 0.000001 ...

$\Big\}$ $E' \neq \emptyset$ esiste almeno un punto di accumulazione $\bar{x}$ per E

compr. in intervallo finito

quindi

$$\exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset E \setminus \{\bar{x}\} : \lim_{x \to +\infty} x_n = \bar{x}$$

E = limitato → contenuto in intervallo

$$E \subseteq [a_0, b_0]$$

$$\#(E \cap [a_0, b_0]) = \infty$$ (ci sono ∞ punti in E)

DICOTOMIA (:2)

punto medio

$$c = \frac{a_0 + b_0}{2}$$ avremo le metà $[a_0, c]$ e $[c, b_0]$

In almeno una delle due metà ci sono ∞ punti di E.
Ne scegliamo una contenente ∞ p. di E. La denotiamo $[a_1, b_1]$:

$$\#(E \cap [a_1, b_1]) = \infty$$

iterando (all' ∞)
avremo una successione decrescente di intervalli

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \subset \ldots \subset [a_0, b_0]$$

con proprietà

$$\#(E \cap [a_k + b_k]) = \infty \qquad \forall k \geq 0$$

notiamo che $\{a_k\}$ è crescente e SUPER. limitata da b_0
$\{b_k\}$ è decrescente e INFER. limitata da a_0

Ogni intervallo è lungo la metà del precedente

Per il teorema di convergenza delle successioni monotone

$$\exists \lim_k a_k, \exists \lim_k b_k$$

e

$$\left(\lim_k a_k\right) - \left(\lim_k b_k\right) = \lim_k (b_k - a_k) = \lim_{k \to \infty} \frac{(b_0 - a_0)}{2^k} = 0$$

→ Lunghezza k-esimo intervallo

$$\exists \lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k =: \bar{x} \in \mathbb{R}$$ (lim comune) candidato p. di accumulazione

$$\lim_{k\to+\infty} a_k - \lim_{k\to+\infty} b_k = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

limite differenza = diff. dei limiti

$\#(E \cap [a_k, b_k]) = \infty$ * $\quad \forall k \geq 0$

$\exists\, x_k \in E \cap [a_k, b_k] \,/\, x_k \neq \bar{x} \quad \forall k > 0$ esiste un elemento nell'intervallo che non è $\bar{x}$

$a_k \leq x_k \leq b_k \quad \forall k > 0$

Per la monotonia dei limiti $\bar{x} = \lim_k a_k \leq \lim_k x_k \leq \lim_k b_k = \bar{x}$

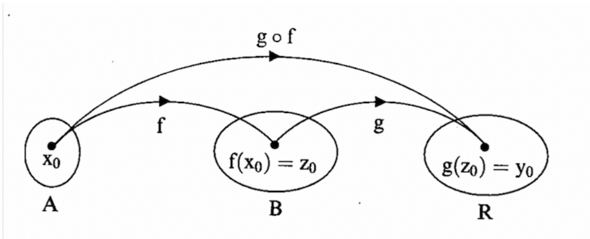
se è compreso tra $\bar{x}$ e $\bar{x}$ è $\bar{x}$ $\Rightarrow \exists \lim_k x_k = \bar{x}$

Abbiamo verificato la condizione che si assicura che $\bar{x}$ è un punto di accumulazione per l'insieme E=> $\bar{x} \in$ E. * *

Continuità delle funzioni composte

Continuità delle funzioni composte

Siano date le due funzioni $f: A \to B$ e $g: B \to R$ con $A \subseteq R$, $B \subseteq R$.
Se f è continua in $x_0 \in A$ e g è continua in $f(x_0) \in B$ allora la funzione composta g $\circ$f è continua in x_0.



Teorema

Sia (g $\circ$f) (x) =g[f(x)] la funzione composta di f(x) e g(z). Se f(x) è continua in x_0 si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, e se g(z) è continua in z_0=f(x_0) si ha $\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$, allora la funzione composta g[f(x)] è continua in x_0 e risulta

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right] = g[f(x_0)]$$

Teorema degli Zeri

Teorema degli zeri

insieme f continue nell'intervallo chiuso [a, b]

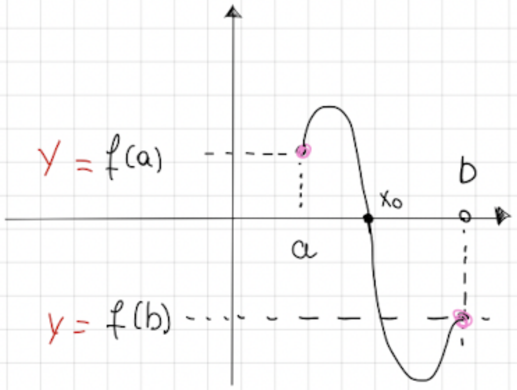
Sia $f \in \mathcal{C}([a,b])$ (di classe $\mathcal{C}$) — F è continua nell'intervallo chiuso [a, b]

$f(a) \cdot f(b) < 0$ — F assume valori di segno opposto agli estremi a e b)

una f sta sotto l'asse x

Se f(b) sta sotto l'asse x $f(a) \cdot (-f(b)) < 0$

Allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ dove f si annulla $\rightarrow f(x_0) = 0$



In altre parole:
G(f) **intercetta** con il dominio [a,b]

Intercetta
Intersezione ≠ dal vuoto

Dimostrazione:

Denotiamo $a_0 := a,\ b_0 := b$ consideriamo il punto medio C

$c = \frac{a_0 + b_0}{2}$ $f(c) = c = x_0 = 0$ metà

Allora $f(c) = 0$ e $x_0 := c$ sè il punto cercato oppure $f(c) \neq 0$ e allora

$f(a_0) \cdot f(c) < 0$ oppure $f(c) \cdot f(b_0) < 0$

Se $f(c) \neq 0$ il segno coincide o con $f(a)$ o con $f(b)$

Agli estremi di esattamente una delle metà $[a_0, c]$, $[c, b_0]$, la funzione assume valori di segno opposto:

chiamo $[a_1, b_1]$ una metà. $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ e rifaccio $\frac{a_1 + b_1}{2} = c_1$

Iterando, dopo un numero finito di passi, in uno dei punti medi F si annulla, e allora ci fermiamo perché abbiamo trovato lo zero di F, oppure otteniamo una sequenza di intervalli decrescenti.

$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \subset \ldots \subset [a_0, b_0]$

tale * $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0 \quad \forall k \geq 0$

Come visto altre volte per la dicotomia

$\exists \lim_k a_k = \lim_k b_k = x_0 \in [a,b]$

Passo al limite a sinistra e a dx nella disuguaglianza *
e per il teorema di permanenza del segno

$$\lim_{k} f(a_k) \cdot f(b_k) \boxed{\leq} 0$$

Per le proprietà dei limiti

$$\left(\lim_{k} f(a_k)\right) \cdot \left(\lim_{k} f(b_k)\right) \leq 0$$

Visto che f è CONTINUA ~~possiamo~~ portare i limiti nell'argomento di f:

$$f\Big(\underbrace{\lim_{k} a_k}_{x_0}\Big) \cdot f\Big(\underbrace{\lim_{k} b_k}_{x_0}\Big) \leq 0$$

$$f(x_0) \cdot f(x_0) \leq 0$$

$x_0 = c$ vedi sopra

$$f(x_0)^2 \leq 0$$

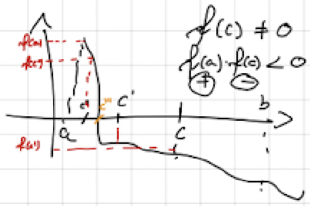
$\Rightarrow f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ è un punto dove f si annulla

= è zero della funzione

cvd

$f(x) = 3x + 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$



$f(c) \neq 0$

$f(a) \cdot f(c) < 0$ ✓

$f(c') \neq 0$ $[a; c]$

$f(c') \cdot f(c) < 0$? NO

$f(a) \cdot f(c') < 0$ ✓

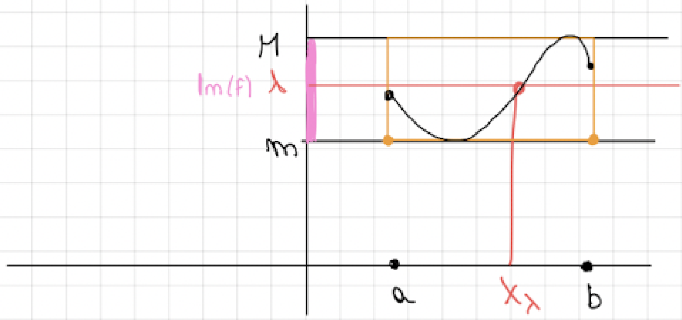
Teorema dei valori intermedi

Teorema dei valori intermedi

insieme f continue nell'intervallo chiuso [a,b]

Sia $f \in C([a,b])$ e siano m e M i suoi Minimo e Massimo valore (per il Teorema di Weierstrass). Allora $Im(f) = [m, M]$

cioè l'immagine di f su [a,b] è l'intervallo chiuso [m, M]



Quindi Im(f) non ha buchi è cioè connessa.

DIM. Siano $x_m, x_M \in [a,b]$ i punti di massimo e minimo rispettivamente di f

Consideriamo λ (lambda) valore intermedio $\lambda \in (m, M)$ e la funzione

$g : [x_m, x_M] \to \mathbb{R}$ $\quad g(f) = f(x) - \lambda$

g è continua nell'intervallo...

$g \in C([x_m, x_M])$ Poiché differenza di funzioni continue

Poiché $g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0$

$g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$

$g(x_m) \cdot g(x_M) < 0$

possiamo applicare a g su [Xm,XM] il teorema degli zeri e ottenere

$\exists\, x_\lambda \in (x_m, x_M)$ dove

$g(x_\lambda) = f(x_\lambda) - \lambda = 0$

cioè $f(x_\lambda) = \lambda$

quindi $\lambda \in Im(f) \;\; \forall \lambda \in (m, M)$.

per cui $(m, M) \underset{\text{contenuto}}{\subseteq} Im(f) \underset{\text{contenuto}}{\subseteq} [m, M]$

Ovviamente $m, M \in Im(f)$ e quindi $Im(f) = [m, M]$ CVD

Teorema di continuità delle funzioni derivabili

Derivate

Teo. Le funzioni derivabili sono continue

Lemma: continuità delle funzioni derivabili

Se f è derivabile in $x=0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

Condizioni necessaria affinché f sia derivabile è che sia continua (ma il contrario non è vero)

f continua $\Rightarrow f$ derivabile
f continua $\not\Leftarrow f$ derivabile

Dimostrazione

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} \cdot (x-x_0) =$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} (x-x_0)\right) =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

← la f è continua in x_0

c.v.d.

Controesempio f(x)= |x|

$f(x) = |x| \quad x \in \mathbb{R}$

La funzione modulo è continua in $x_0 = 0$ ma non derivabile

Esercizio: perché la funzione modulo non è derivabile

su notion per esteso

1. La f è derivabile in x_0 se esiste il limite del rapporto incrementale.
2. Se esiste, il limite deve essere unico: limite destro e sinistro devono essere uguali.
3. Se la **derivata destra e sinistra non coincidono** in un punto x_0, **i limiti destro e sinistro non coincidono** e il **limite del rapporto incrementare non esiste**, di conseguenza la funzione non è derivabili in quel punto.
4. Visto che per definizione

$$y = |x| \Rightarrow y = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$. continua e definita su tutto $\mathbb{R}$

Ma

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Limite del rapporto incrementale destro è diverso da quello sinistro: derivata sinistra e destra in zero non coincidono

Teorema della derivata di somma e prodotto e composizione di funzioni

Teo. Proprietà di calcolo per la derivata

essendo la derivata tecnicamente un limite (limite del rapporto incrementale), le proprietà discendono da quelle del limite

1. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

per esercizio fare esempio

2. Regola di Leibnitz

Derivata di prodotto tra due funzioni=

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Esempio: (x• senx)’ = (x)’ senx+ x sen’x = 1• senx+xcosx

Dimostrazione

ho aggiunto e tolto

$$\overbrace{\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0}}^{\text{RAPPORTO INCREM.}} = \frac{(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{g(x_0)} + \underbrace{f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{f(x_0) \cdot g'(x_0)} \xrightarrow{x \to x_0}$$

per la continuità di g in (x_0)

RAPPORTO INCREMENTALE di f

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

3. Quoziente

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Per esercizio dobbiamo partire dal rapporto incrementale f\g e aggiungere e togliere la stessa cosa per mettere in luce il rapporto incrementale

4. Derivazione funzione composta

$y = f(x)$

$g(y) = g(f(x))$

Il teorema per la derivata della funzione composta (o chain-rule), permette di calcolare la derivata di una composizione di funzioni sotto forma di prodotti e derivazioni concatenate.

$g(f(x))$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Dimostrazione rapporto incrementale della funzione composta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) =$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\right) \cdot \boxed{\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} \rightarrow f'(x)$$

cambio variabile $y_0 := f(x_0)$ $\quad y := f(x) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0) = y$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\right) \cdot f'(x) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Lemma di Fermat

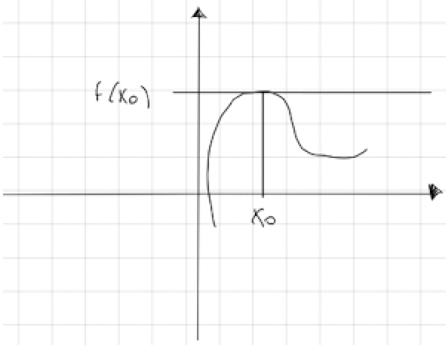
Lemma di Fermat

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ abbia estremo (Max/Min) in $x_0 \in (a,b)$. Se f è derivabile in x_0 ($\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$) allora $\underbrace{f'(x_0) = 0}$.

cioè la retta tg in x_0 è orizzontale

ma non è sempre vero il contrario

Punto critico: si annulla la derivata (=0)



La derivata nel punto critico (dove c'è Max\min) è 0

La retta tangente in X_0 è orizzontale

Punto critico: si annulla la derivata (=0)

una funzione che ammette un massimo od un minimo relativo o assoluto in un punto, e che sia ivi derivabile, ha necessariamente la derivata prima nulla nel punto. La retta tangente in quel punto è orizzontale

Sia $y = f(x)$ una funzione con dominio $Dom(f) \subseteq \mathbb{R}$. Se $x_0 \in Dom(f)$ è un punto estremante per f, e la funzione è derivabile in quel punto, allora si ha che

$$f'(x_0) = 0$$

l'annullamento della derivata prima di una funzione derivabile in un punto x0 del dominio è condizione necessaria affinché x0 sia un punto di massimo o minimo relativo (quindi eventualmente anche assoluto) per la funzione.

Dimostrazione: x_0 punto di massimo della funzione

$x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ STUDIO il RAPP. INCR.

Supponiamo di prendere

(Poiché x0 è un punto di massimo relativo, dato un decremento [o incremento?] f(x0), vale)

$\boxed{a < x < x_0 < b}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ x - x_0 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ per la permanenza segno

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \boxed{\geq 0}$$

se f(x) è derivabile in un punto, i limiti per x->x_0+ e x->x_0- devono essere uguali

se $\boxed{a < x_0 < x < b}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ x - x_0 > 0 \end{array}\right\} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} f'(x_0) & \geq 0 \\ f'(x_0) & \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) \text{ deve essere nulla}$$

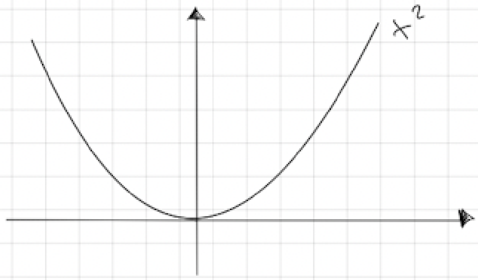
I due limiti sono rispettivamente limite destro e limite sinistro della derivata prima, Per l'ipotesi di derivabilità di f in x0 in due limiti devono coincidere, quindi essendo una volta ≥ e ≤ l'unico caso possibile è che siano entrambi =0;
quindi f'(x_0)= 0

Esempio

$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

$f(x) = x^2 \qquad f' = 2x \qquad f'(0) = 0$

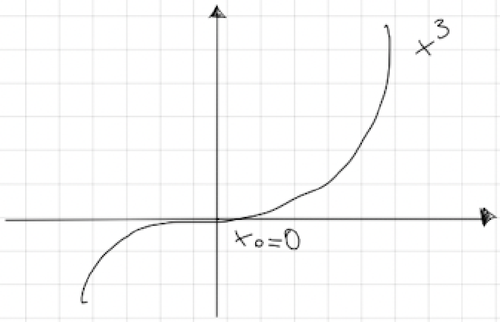
e $x_0 = 0$ è punto di minimo nella funzione



controesempio

$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$

$x_0 = 0$ È un punto critico ma non è estremo



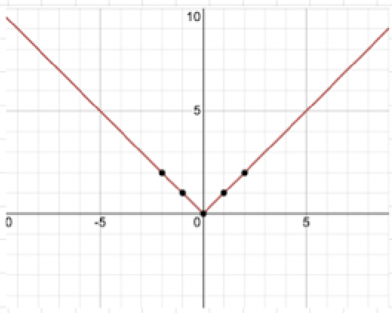
l'annullamento della derivata prima di una funzione derivabile in un punto x0 del dominio è condizione necessaria affinché x0 sia un punto di massimo o minimo relativo (quindi eventualmente anche assoluto) per la funzione.

Osservazione La lemma permette di restringere la ricerca di estremi di una funzione in (a, b) ai punti critici (solitamente pochi) e ai punti di non derivabilità

$x^2 = f(x) \qquad f'(x) = 2x \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cdot \; 0$

ES $f(x) = |x| \qquad x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

f è derivabile per $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} x > 0 & +1 \\ x < 0 & -1 \end{cases}$$

$x > 0$ $\quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \xrightarrow{x \to 0^+} 1$

$x < 0$ $\quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 \xrightarrow{x \to 0^-} -1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ $\quad$ f. NON derivabile

Poichè $f'(x) \neq 0$ per $x \neq 0$ la funzione NON HA ESTREMI in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

In $x_0 = 0$ il lemma di Fermat non si applica perchè NON esiste derivata prima nell'origine

($\Rightarrow$ L'UNICA IPOTESI: deve esistere la derivata nel punto che trattiamo)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ma } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = 0 \text{ minimo globale}$$

Teorema di Lagrange

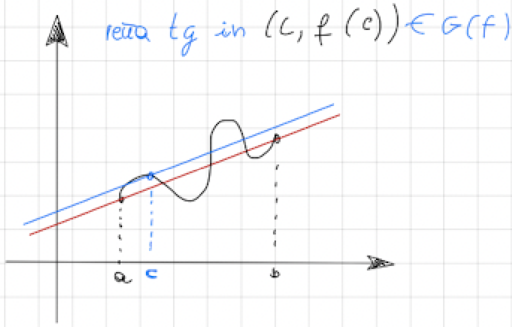
Teorema di Lagrange (o del valor medio o dell'incremento finito)

$f \in C([a,b])$ (continua) derivabile in (a,b) Allora * $\exists c \in (a,b) /$

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ cioè la retta tangente al grafico $G(f)$ nel punto $(c, f(c))$ è parallela alla retta passante per i punti estremi del grafico della funzione. cioè

Dal punto di vista geometrico, dato il grafico di una funzione tra due estremi, esiste almeno un punto in cui la tangente al grafico è parallela alla secante passante per gli estremi. È usato per provare delle proprietà di una funzione in un intervallo partendo da ipotesi locali sulle derivate nei punti di tale intervallo.
Il teorema di Lagrange può anche essere considerato un caso particolare del teorema di Cauchy.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b). Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. [3]



Dimostrazione considleriamo la funzione

$G: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

il cui grafico è la retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ punti estremi $G(f)$

$g(a) = f(a) \qquad g(b) = f(b)$

Una quasiasi funzione algebrica intera (polinomio) P(x) è sempre derivabile in ogni suo punto. Infatti la derivata di un polinomio è ancora un polinomio e dunque è sempre continua.

$g \in C([a,b])$ e derivabile in (a,b) poichè g è polinomio (di grado 1)

e $g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ "funzione ausiliaria"

consideriamo la funzione differenza $h: [a,b] \to \mathbb{R}$

$h(x) := f(x) - g(x)$ Si ha $h \in C([a,b])$ poichè differenza di funzioni continue

differenza di due funzioni continue è una funzione continua

$h(a) = f(a) - g(a) = 0$

$h(b) = f(b) - g(b) = 0$

Per il Teo di Weierstrass h ha punto di Min. x_m e punto di Max x_M in $[a,b]$

NOTA: teorema di Weierstrass:

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato non vuoto e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(x)$ ammette (almeno) un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto nell'intervallo $[a,b]$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ x_m, x_M sono agli estremi di $[a,b]$

uno è in a e l'altro è b

$$f(x_m) \le f(x) \le h(x_M)$$

$\Rightarrow$ h è costante (e nulla) h: funzione differenza $g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\Rightarrow 0 = h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$ ogni $c \in (a,b)$

soddisfa la tesi * $\exists c \in (a,b) / f'c = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ almeno un punto di estremo tra x_m e x_M sono in (a,b). Sia per es $x_M \in (a,b)$

per il lemma di Fermat applicato ad h

$$0 = h'(x_M) = f'(x_M) - g'(x_M)$$

$$= f'(x_M) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_M) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$$

la tesi è soddisfatta con $c = x_M$

cvd

Test di monotonia

Conseguente Teorema Lag.

Teorma **test di Monotonia** studio del segno della derivata

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto (a,b)

1. f'(x) ≥ 0 = positiva = funzione monotona **crescente** $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$
2. f'(x) ≤ 0 = negativa = funzione monotona **decrescente** $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$

Dimostriamo

Supponiamo sia f crescente:

$a < x < y < b \qquad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 \qquad \Rightarrow \lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$

per la permanenza del segno

Supponiamo $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$ siano $a < x < y < b$.

APPLICHIAMO IL TEOREMA DI LAGRANGE alla f su $[x,y]$

(ovviamente le ipotesi sono verificate):

$\exists c \in (x,y) \ / \ 0 \leq f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow (y-x > 0) \Rightarrow$

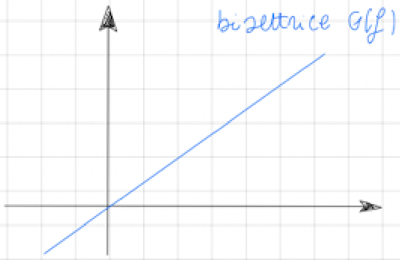
$f(y)-f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$\forall a < x < y < b \Rightarrow f$ è crescente esempi

① $f(x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = +1 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ è crescente



② $f(x) = x^2 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 2x$

punti critici dove si annulla $f'(x) = 2x = 0 \iff x = 0$

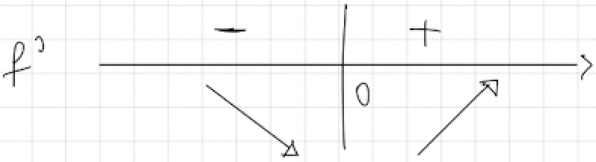
un solo punto critico

studio segno di f'

$0 < f'(x) = 2x \iff x > 0 \Rightarrow f$ è crescente $(0, +\infty)$

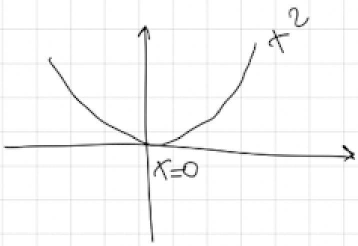
come $f(x) = x^2$ sempre pos

$0 > f'(x) = 2x \iff x < 0 \Rightarrow$ è decrescente $(-\infty, 0)$



poiché f è continua in $x = 0$, si ha che $x = 0$ è MINIMO (ASSOLUTO)

$0 = f(0) \leq f(x)$



es. $f(x) = x^3 \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow f$ è crescente su $\mathbb{R}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow x=0$ è punto critico ma né max né min

es. $f(x) = |x| \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 > 0 \quad x > 0$ crescente

$f'(x) = -1 < 0 \quad x < 0$ decrescente

poichè f è continua in $x=0$ si ha che $x=0$ è minimo (assoluto/globale)

f. sempre positiva

$\nexists\ f'(0)$, cioè f non è derivabile

Teorema di Taylor-Peano

Teorema di Taylor con resto di Peano

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ n-volte derivabile in $x_0\in(a,b)$, $n\geq 1$. ← n volte che può essere derivato

Definiamo il suo Polinomio di Taylor in x_0 di ordine n:

funzione f; derivata k-esima valutata in x_0

dipende da f, n e x_0 ← ⊛ $$T^f_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k \qquad x\in\mathbb{R}$$

ordine di derivazione

⊛ Taylor valutato nel punto x_0 della funzione f, la quale ha ordine di derivazione n

(grado del $T^f_{n,x_0} \leq n$) → mi fermo al massimo al grado "n"

$$= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Allora $\exists\ R^f_{n,x_0} : (a,b)\to\mathbb{R}$ tale che (resto)

$$* \quad f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + R^f_{n,x_0}(x) \qquad \forall x\in(a,b)$$

$$* * \quad \lim_{x\to x_0}\frac{R^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

R è un infinitesimo = tende a 0 (prima DEN.)

R^f_{n,x_0} è infinitesimo di ordine $> n$, per $x\to x_0$

cioè $R^f_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n)$ e la * si scrive

∗ metto il grado di derivazione a cui arrivo

$$\boxed{f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n),\ x\to x_0}$$

Esempio Taylor ordine $n=1$ = Mi fermo alla derivata prima

$\exists\ f'(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = T^f_{1,x_0}(x) + \sigma(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \sigma(x-x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \sigma(x-x_0)$$

vedi lemma altra lezione "f.R"

Dim. è sufficiente mostrare $*$ $*$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} =$$

applico D.H. vedo se le ipotesi soddisfatte $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ (sono derivabili? Polinomi sì)

applico dH $n-1$ volte

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0) - \sum_{k=1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}}$$ 1° volta

applicando DH devo fare la derivata

porto fuori fattore numerico

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \left[f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)\right]}{\underbrace{n(n-1)(n-2)\dots 2}_{n!}\cdot(x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} - \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}}\right\}$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left\{\underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}}_{\text{rapporto incrementale di } f^{(n-1)} \text{ tra } x \text{ e } x_0} - f^{(n)}(x_0)\right\} \circledcirc$$

$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$ per ipotesi $\exists\ f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}$

se esiste la deriv. n-esima di f in x_0 allora esiste il lim del rapporto incrementale

$= 0$. Cvd

tutto $= 0$

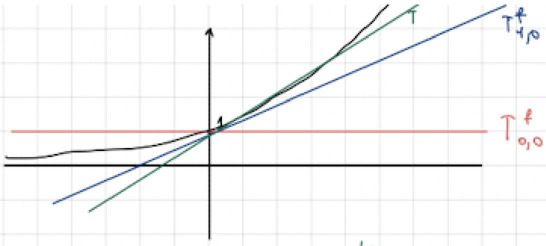
Esempi ① $f(x) = e^x$ $x_0 = 0$ $n \geq 0$

$f^{(k)}(x) = e^x$ $f^{(k)}(0) = 1$ $\forall k \geq 0$

$$T^f_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}_{\text{somme esponenziali } (S_n(x))}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$x^0 = 1$, $0! = 1$



vedi screen

ES. $f(x) = e^x \quad x_0 = 1 \quad , n \geq 0$

$f^{(k)}(x) = e^x \qquad f^{(k)}(1) = e^1 = e \qquad k \geq 1$

$$T^f_{n,1}(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = e \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^k}{k!} = e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + o\left((x-1)^2\right)\right)$$

Teorema Taylor con resto secondo Lagrange

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-volte derivabile in (a,b)

$x_0 \in (a,b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tra x_0 e x

cioè $|c - x_0| < |x - x_0|$

f derivato n+1 volte valutata in c

tale che $\quad f(x) - T^f_{n,x_0}(x) = R^f_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

IPOTESI:
n+1 derivata deve esistere in tutto l'intervallo

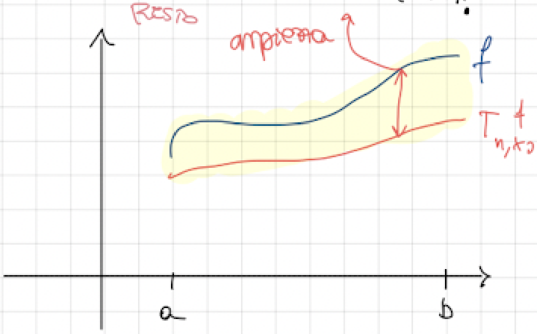
specificare al massimo il resto

= esiste est. sup

In particolare se $M_{n+1} := \sup_{x \in (a,b)} |f^{(n+1)}(x)| < +\infty$

poiché $|x - x_0| \leq (b-a)$ e $|f^{(n+1)}(c)| \leq M_{n+1}$, si ha che

$$\underbrace{\left|f(x) - T^f_{n,x_0}(x)\right|}_{\text{Resto}} \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^n \qquad \forall x \in (a,b)$$



approssimare globalmente funzione ecc

1° Teorema fondamentale del calcolo integrale

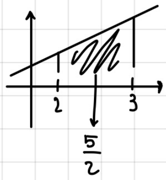
(Primo) **Teorema fondamentale del calcolo** anche in 18.2

Sia $f \in \mathcal{R}(I)$ una f. integrabile su I.

Se $F: I \to \mathbb{R}$ è una sua primitiva allora $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

- trovare primitiva (integrale)
- fare differenza

esempio $\int_2^3 x = \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$



esempio parabola

$f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$ ha primitiva $F(x) = \frac{1}{3} x^3$

$\int_0^1 x^2\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} 1^3 - \frac{1}{3} 0^3 = \frac{1}{3}.$

Dimostrazione

per ogni partizione $P=\{I_K\}_{K=1}^{n} \subset P(I)$ con $I_K=[x_K, x_{K+1}]$,
$K=0,\dots,n$ $(x_0=a,\ x_{n+1}=b)$

somme telescopiche

$I=[a,b]$ abbiamo $\quad F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)=\sum_{K=1}^{n-1}\left[F(x_K)-F(x_{K-1})\right]=$

applico il teorema di Lagrange a F su I_K

$\exists\, y_K \in (x_K, x_{K+1}) \,/\, \dfrac{F(x_K)-F(x_{K-1})}{x_K-x_{K-1}} = F'(y_K)=f(y_K)$

$F(x_K)-F(x_{K-1}) = f(y_K)\cdot(x_K-x_{K-1}) = f(y_K)\cdot(I_K) = \quad \sum_{K=1}^{n-1} |I_K|\, f(y_K)$

Ma $\quad \left(\inf_{I_K} f\right) \le f(y_K) \le \left(\sup_{I_K} f\right)$

$s(f,P) = \sum_{K=1}^{n-1} |I_K|\cdot\left(\inf_{I_K} f\right) \le \underbrace{\sum_{K=1}^{n-1} |I_K|\cdot f(y_K)} \le \sum_{K=1}^{n-1} |I_K|\left|\sup_{I_K} f\right| = S(f,P)$

$s(f,P) \le F(b)-F(a) \le S(f,P) \quad \forall P \in P(I)$

$\underline{I}(f) = \sup s(f,P) \le F(b)-F(a) \le \inf S(f,P) \le \overline{I}(f)$

$\underline{I}(f) \le F(b)-F(a) \le \overline{I}(f)$

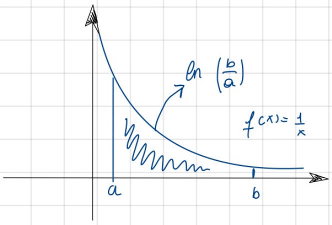
Poichè $f \in \mathcal{P}(I)$ è integrabile, abbiamo

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

esempio $\quad F(x)=\ln x \quad x\in(a,b) \subset (0,+\infty)$

$F'(x)=\frac{1}{x}=f(x) \quad x\in(a,b)$

$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = F(b)-F(a) = \ln b - \ln a = \ln(b/a)$



interpretazioni

① $v: [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ velocità istant. particella

$$= \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\overbrace{v(t)\, dt}^{\text{spostamento}}}_{\text{velocità}}$$

spostamento ∞-tesimo percorso durante dt

dt ← tempo infinitesimo

$v \cdot t = s$

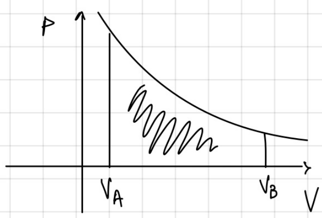
spostamento tot. nell'intervallo finito $[t_1, t_2]$

② $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$ = distanza percorsa dalla particella durante $[t_1, t_2]$

③ Gas perfetti: $p \cdot V = nRT$

p: pressione; V: volume; T: temperatura

$P(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}$ $V > 0$



$$\int_{V_A}^{V_B} \underbrace{P(V)}_{\text{pressione}}\, \underbrace{dV}_{\text{Volume}} = \text{lavoro espansione del gas tra i volumi } V_A \text{ e } V_B$$

pressione $= \frac{F}{A}$ $F \cdot S = L$

$$= \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V}\, dV =$$

$F(V) = nRT \cdot \ln V$

$F'(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}$

$$= F(V_B) - F(V_A) = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

2° Teorema fondamentale del calcolo integrale

2° Teor. fondamentale del calcolo

F grande di x data dall'integrale da a a x di una f in funzione di y, anche se c'è un'altra variabile all'interno dell'integrale ,cioè y, lo valuto da a ad x. La funzione integrale F è una funzione di x, non più di y

Sia $f \in \mathcal{R}(I)$ e definiamo $(I=[a,b])$

$F:[a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad F(x) := \int_a^x f(y)\,dy \qquad x \in [a,b]$

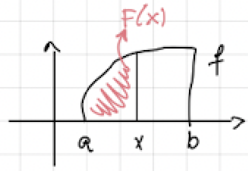
integro la variabile y

numero

numero

$F(b)-F(a) = F(x) - F(a) = F(x)$

funzione integrale di f



Allora

f. integranda

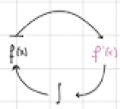
① Se f è anche limitata la sua f. integrale (F) è CONTINUA

$$F \in C([a,b])$$

② Se f è anche continua, $f \in C([a,b])$ allora F è DERIVABILE e

$$F'(x) = f(x) \qquad x \in (a,b)$$

cioè F è primitiva di f.



Dimostrazione

1. Se f è limitata $\exists M \geq 0 / -M \leq f \leq M$ su $[a,b]$ così $|f| \leq M$ su $[a,b]$

Fissiamo $x_0 \in [a,b]$

$F(x_0+h) - F(a) - (F(x_0) - F(a))$

$= F(x_0+h) - \cancel{F(a)} - F(x_0) + \cancel{F(a)}$

$= F(x_0+h) - F(x_0)$

usando l'additività

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f \Rightarrow |F(x_0+h) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} f\right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f| \leq$$ monotonia

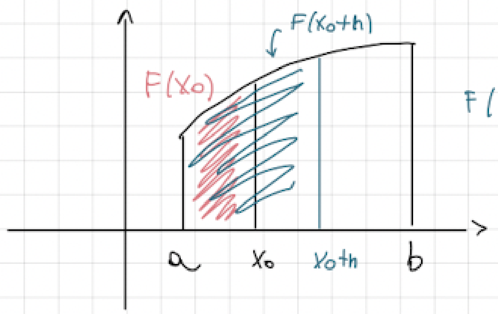
$$\leq \int_{x_0}^{x_0+h} M\,dx = M \cdot |h|$$

$$\left|\lim_{h\to 0} F(x_0+h) - F(x_0)\right| = \lim_{h\to 0} |F(x_0+h) - F(x_0)| \leq \lim_{h\to 0} M \cdot |h| =$$

$$M \cdot \lim_{h\to 0} |h| = M \cdot |0| = M \cdot 0 = 0$$

così $\lim_{h\to 0} F(x_0+h) = F(x_0)$ cioè F è continua in x_0

Poiché $x_0 \in [a,b]$ è arbitrario : $F \in C([a,b])$



$$F(x_0+h)-F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f$$

2. $$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f$$ = media integrale f nell'interv. tra x_0 e x_0+h

per Teo Media Integrale $= f(y(h))$ per un opportuno punto $y(h)$ tra x_0 e x_0+h

$$|y(h)-x_0| \leq |(x_0+h)-x_0| = |h|$$

Notiamo $\lim_{h\to 0} y(h) = x_0$ Quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(y(h)) =$$ poiché f è continua

$$= f\left(\lim_{h\to 0} y(h)\right) = f(x_0)$$ Quindi

$\exists\ F'(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in (a,b)$.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,dy = f(x)$$

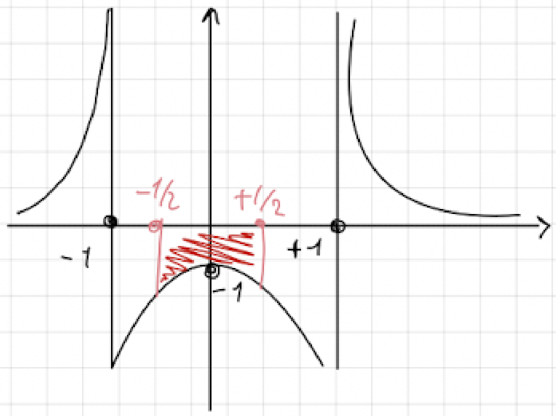
Integrale derivata sono due facce della stessa meda

Es. $I = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) dx = -\frac{1}{2}\left\{ \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{x}{x+1} - \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{x-1} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ln(x+1) - \ln|x-1|\Big]_{-1/2}^{+1/2} = -\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_{-1/2}^{+1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{3/2}{-1/2}\right| - \ln\left|\frac{1/2}{-3/2}\right|\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$$



osserv. La primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$ è

$F(x) = \ln|x| \quad x \neq 0$

(non è solamente $\ln x$ che è def. solo per $x>0$)

$$F(x) = \begin{cases} x>0 & \ln x \\ x<0 & \ln(-x) \end{cases} \Rightarrow F'(x) = \begin{cases} x>0 & 1/x \\ x<0 & \frac{1}{-x}\cdot(-1) = 1/x \end{cases}$$

$\Rightarrow F'(x) = f(x) \quad x \neq 0$

Teorema di integrazione per parti

teorema di integrazione per parti

$f, g \in C([a,b])$ e derivabili in (a,b) con $f', g' \in C[(a,b)]$

Allora vale la seg. identità:

$$\int_a^b f' \cdot g = \underbrace{[f(b)\, g(b) - f(a) \cdot g(a)]}_{[fg]_a^b} - \int_a^b f \cdot g'$$

Viene prima valutata in b, poi in a, poi viene fatta la differenza

es

$I = \int_0^1 x\, e^x \, dx$ $\quad h(x) = x e^x$

$x = g(x)$, $e^x = f'(x)$ $\Rightarrow$ $g'(x) = 1$ $\quad f'(x) = e^x$

criterio fondamentale di integrabilità

$h \in C([a,b]) \Rightarrow h \in \underset{\text{integrabile}}{\mathcal{R}}([0,1])$

$\Rightarrow \exists\, I \in \mathbb{R}$ $\quad$ APPLICANDO IL TEOREMA SOPRA

$$I = [fg]_0^1 - \int_0^1 \underset{f(x)}{e^x} \cdot \underset{g'(x)}{1}\, dx = [e^x \cdot x]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot dx$$

$$= (e^1 \cdot 1 - \cancel{e^0 \cdot 0}) - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1$$

Facendo un'altra scelta

$$I = \int_0^1 \underset{g(x)}{x}\, \underset{f'(x)}{e^x}\, dx = \quad \left(g'(x) = e^x, \quad f(x) = \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^x \, dx$$

più complicato dell'integ. originale: la regola si applica ma non è efficace

Dimos Per le ipotesi $f \cdot g$ è derivabile e la sua derivata è

$$(f g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \longrightarrow \text{implicato dalla regola di Leibnitz}$$

$\in C([a,b])$ per le Hp → ipotesi su f, g, f', g'

Per il teorema fondamentale del calcolo $f \cdot g$ primitiva di $(f \cdot g)'$ =

$$\int_a^b (f \cdot g)' = [f \cdot g]_a^b$$

$$= \int_a^b (f' \cdot g + f \cdot g') = \int_a^b f' g + \int_a^b f \cdot g' \Rightarrow \int_a^b f' \cdot g =$$

$$= [f g]_a^b - \int_a^b f \cdot g'$$

$\boxed{\text{cvd}}$

ES 2 $\quad I = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx \qquad h(x) = (\sin x)^2 \qquad h \in C([0, 2\pi])$

$\Rightarrow h \in \mathcal{R}([0, 2\pi]) \Rightarrow \exists \, I \in \mathbb{R}$

$$I = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} \cdot dx =$$ applichiamo T. integ. per parti

$$= (f(x) = -\cos x \,,\ g'(x) = \cos x) = \big[\underbrace{-\cos x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)}\big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\cos^2 x$$??? $\int f \cdot g'$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 x) \, dx = \int_0^{2\pi} 1 - \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$= 2\pi \cdot 1 - I = 2\pi - I \quad \text{cioè}$$

$$I = 2\pi - I$$

$$2I = 2\pi$$

$$I = \pi \quad \Rightarrow \quad I = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \pi$$

Teorema di integrazione per sostituzione

Integrazione per sostituzione

$f \in \mathcal{C}([a,b])$, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ continua e derivabile

con $\varphi' \in \mathcal{C}([c, d])$.

Allora vale l'identità

$$\int_a^b f(y)\, dy = \int_c^d f(\underbrace{\varphi(x)}_{y}) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

Dimostrazione Sia F primitiva di f: $F' = f$ e poniamo $G = F \circ \varphi$ composta

per la regola di derivazione della funzione composta

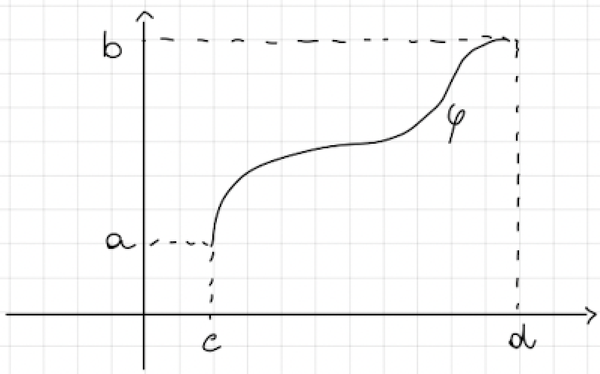
$$G'(x) = (F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Quindi G è primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ e per il 1° teo fond. calcolo

$$\int_c^d f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \left[G\right]_c^d = G(d) - G(c) =$$

$$= F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)\, dy$$

cvd



Teorema della media integrale

Teorema del valor medio integrale

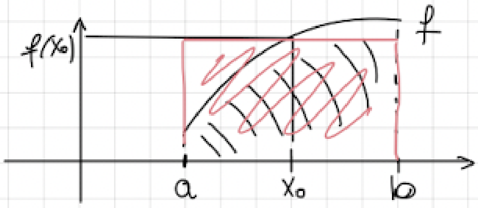
$f \in C(I)$ allora $\exists\, x_0 \in [I]$ /

$f(x_0) = \frac{1}{|I|} \cdot \int f$ = Media integrale di f su I

$|I|$ ↑ lunghezza intervallo

Media integrale → $\frac{\text{integrale } f}{\text{lungh. int.}}$

Significato geometrico



$$\int_I f = |I| \cdot f(x_0) = \text{area rettangolo}$$

$I \times [0, f(x)]$ A rettangolo = Area sottografico

Dimostrazione.
Per il teorema di Weierstrass f ammette minimo m e massimo M

$$m \leq f(x) \leq M \qquad x \in I$$

Per la monotonia $\int_I m\,dx \leq \int_I f(x)\,dx \leq \int_I M\,dx$

$$|I| \cdot m \leq \int_I f(x)\,dx \leq |I| \cdot M$$

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{|I|} \cdot \int_I f}_{\text{valore intermedio}} \leq M$$

Per il teorema valori intermedi $\Rightarrow \exists\, x_0 \in I$ /

$$\frac{1}{|I|} \cdot \int_I f = f(x_0).$$

cvd

$x^3 + C$ → generica

$x^3 \Big|_0^4 = 4^3 - 0^3$ $\quad \int_0^4 3x^2 + 5y \; dx \quad dy$

F

Teorema della Radice

Teo criterio della radice

$0 \leq a_n$ e sia $\exists\ \ell = \lim_n \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty]$. Allora

1. se $\ell \in (0,1)$ allora la serie $\sum_n a_n$ converge
2. se $\ell > 1$ // diverge

Se $l=1$ non si può dire nulla

Dim

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ N(\varepsilon) \geq 0 \ / \ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sqrt[n]{a_n} - \ell \right| < \varepsilon$

$$1-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell+\varepsilon$$

Se $\ell < 1$ $\exists\ \varepsilon>0 \ / \ \ell+\varepsilon<1$ e quindi

$$a_n < (\ell+\varepsilon)^n =: q^n \qquad q := \ell+\varepsilon < 1$$

$\Rightarrow \sum_n a_n \leq \sum_n q^n$ serie geom. converg.

$\Rightarrow$ (per il confronto) $\sum a_n$ converge

2. se $\ell > 1$ $\exists\ \varepsilon>0 \ / \ \ell-\varepsilon>1$ e quindi

$$q^n := (\ell-\varepsilon)^n < a_n \qquad \text{con } q = \ell-\varepsilon > 1$$

$\sum a_n \geq \sum q^n$ serie geom. divergente

$\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

cvd

Teorema del rapporto

Teo criterio del rapporto

$0 \leq a_n$

$\exists\, \ell := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0,+\infty]$

1. Se $\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
2. Se $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

Dim. 1. $\ell < 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \geq 0 \,/\, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon$

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon$$

$$a_{n+1} < (\ell+\varepsilon)\, a_n < (\ell+\varepsilon)^2 \cdot a_{n-1} < \dots < (\ell+\varepsilon)^{n+1} \cdot a_0$$

Se $\ell < 1 \quad \exists\, \varepsilon > 0 \,/\quad q = \ell + \varepsilon < 1$ così

$$\sum a_n \leq a_0 \sum_{n\geq 0} q^n$$

Serie geom ragione < 1 quindi convergente.

$\Rightarrow$ T. del confronto anche $\sum a_n$ sarà convergente

caso ② è analogo

Es.

Le somme parziali sono monotone crescenti se la serie ha termini negativi. Quindi la successione delle somme parziali o converge a numero finito o converge a $+\infty$: o la serie converge o diverge, non ci sono serie a termini NON negativi che sono oscillanti, indeterminate;

Serie esponenziale

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x!}$ $\quad x \geq 0$ fissato

(le somme parziali sono i polinomi di Taylor - Mc Laurin di e^x)

$a_n = \frac{x^n}{x!}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$\ell = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Teorema di Leibniz

Teorema criterio di Leibniz per la convergenza di serie con termini di segno alterno

Se $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con ① $a_n \geq 0$ ② $\{a_n\}$ decrescente da un indice in poi

e ③ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, allora la serie converge

Es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ non converge assolutamente poiché $\sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_n \frac{1}{n}$

la sua armonica! non converge

ma $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ e a_n è decrescente $\Rightarrow$ la serie a termini di segno alterno $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in Rn

Dimostrazione di Cauchy-Schwartz : $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

def $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) := \|\bar{x} + t\bar{y}\|^2 = (\bar{x} + t\bar{y}) \cdot (\bar{x} + t\bar{y}) =$

per le proprietà del prodotto scalare

$= \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot (t\bar{y}) + (t\bar{y}) \cdot \bar{x} + (t\bar{y})(t\bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 + 2t \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} + t^2 \cdot \|\bar{y}\|^2$ POLINOMIO DI 2° GRADO IN T

$f(t) \geq 0 \Rightarrow G(f)$ è una parabola con vertice nel semipiano superiore (al più sull'asse x)

coeff. positivo = rivolta verso l'alto

$\Delta < 0 := (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 - \|\bar{y}\|^2 \cdot \|\bar{x}\|^2 = |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$

(interseca in massimo 1 punto)

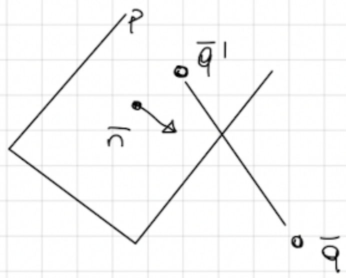
Distanza di un punto $\vec{q}$ da un piano

Come trovare **DISTANZA di un PUNTO $\bar{q}$ da un piano P**

$P = \{ \bar{n} \circ (\bar{p} - \bar{p}_0) = 0 \}$

$d(\bar{q}, P) = \inf \{ \|\bar{p} - \bar{q}\| : \bar{p} \in P \}$

Esiste unico $\bar{q}' \in P$ / $d(\bar{q}, P) = \|\bar{q}' - \bar{q}\|$



per calcolare $d(\bar{q}, P)$ troviamo $\bar{q}'$

① troviamo la retta $L \perp P$ contenente $\bar{q}$:

$L = \{ \bar{q} + t \cdot \bar{n} : t \in \mathbb{R} \}$

② trovare intersezione tra L e P $\quad L \cap P = \{ \bar{q}' \}$

Sostituendo il p.to generico $\bar{r}(t) = \bar{q} + t\bar{n}$ di L nell'eq di P.

$0 = \bar{n} \circ (\bar{q}' - \bar{p}_0) \qquad \bar{r}(t') = \bar{q}'$

$\downarrow$ scalare

$0 = \bar{n} \circ (\bar{q} + t'\bar{n} - \bar{p}_0)$

$0 = \bar{n} \circ (\bar{q} - \bar{p}_0) + t'\bar{n} \circ \bar{n}$

$0 = \bar{n} \circ (\bar{q} - \bar{p}_0) + t' \|\bar{n}\|^2$

$$t' = - \frac{\bar{n} \circ (\bar{q} - \bar{p}_0)}{\|\bar{n}\|^2} \implies \bar{q}' := \bar{r}(t')$$

$$\bar{q}' = q - \frac{\bar{n}\,(\bar{q} - \bar{p}_0)}{\|\bar{n}\|^2} \circ \bar{n}$$ Proiezione di $\bar{q}$ su P

$$d(\bar{q}, P) = \|\bar{q}' - \bar{q}\| = \left\| \cancel{\bar{q}} - \frac{\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}_0)}{\|\bar{n}\|^2} \circ \bar{n} - \cancel{\bar{q}} \right\| =$$

dist. di q da P

$$= \frac{|\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}_0)|}{\|\bar{n}\|^{\cancel{2}\,1}} \circ \cancel{\|\bar{n}\|} = \frac{|\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}_0)|}{\|\bar{n}\|}$$

Nota Dati i piani P_1 e P_2 abbiamo che

$P_1 \cap P_2$ è una retta se e solo se i due piani non sono paralleli tra loro:

P_1 non parallelo a P_2

Se $P_1 \parallel P_2$: $P_1 \cap P_2 = \phi$ è vuoto se P_1 e P_2 non coincidono

$$= \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} a_1(x - x_1) + b_1(y - y_1) + c_1(z - z_1) = 0 \\ a_2(x - x_2) + b_2(y - y_2) + c_2(z - z_2) = 0 \end{cases} \right.$$

$P_1 \cap P_2 \Rightarrow P_1 = P_2$, $P_1 = P_2$ inf. soluz.

Come trovare la retta $L = P_1 \cap P_2$ quando $P_1 \not\parallel P_2$?

$$P_K = \{ \bar{n}_K \cdot (\bar{p} - \bar{p}_K) = 0 \} \qquad K = 1, 2$$

$$P_1 \not\parallel P_2 \qquad \bar{n}_1 \not\parallel \bar{n}_2 \iff \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 \neq \bar{0}$$

Posso scegliere come vettore di direzione $\bar{v}$ di L

$$\bar{v} = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 \neq 0$$

poichè per le proprietà del prodotto vettoriale così abbiamo certamente che

$$\bar{v} \perp \bar{n}_1 \quad e \quad \bar{v} \perp \bar{n}_2$$

e quindi che $L \parallel P_1$ e $L \parallel P_2$

Basta trovare un punto $\bar{p}_0 \in P_1 \cap P_2$

$$L = P_1 \cap P_2 = \{ \bar{n}_1 \cdot (\bar{p} - \bar{p}_1) = 0,\ \bar{n}_2 \cdot (\bar{p} - \bar{p}_2) = 0 \}$$

$$= \{ (x,y,z) : \begin{cases} a_1(x-x_1)+b_1(y-y_1)+c_1(z-z_1)=0 \\ a_2(x-x_2)+b_2(y-y_2)+c_2(z-z_2)=0 \end{cases}$$

inf. soluz.

EQ. cartesiana della retta L

$$\bar{n}_k = (a_k, b_k, c_k) \qquad k = 1,2$$

$$\bar{p}_k = (x_k, y_k, z_k) \qquad //$$