💌

Formulario Integrali

▼ 📩 Indice

Simmetrie e valori assoluti

f integrabile su $[-a;a]$ se:

- f è pari $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)$
- f è dispari $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Risoluzione:

- Se ho una **somma** → scompongo in altri integrali
- Se ho un **prodotto** → per parti o sostituzione

Integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

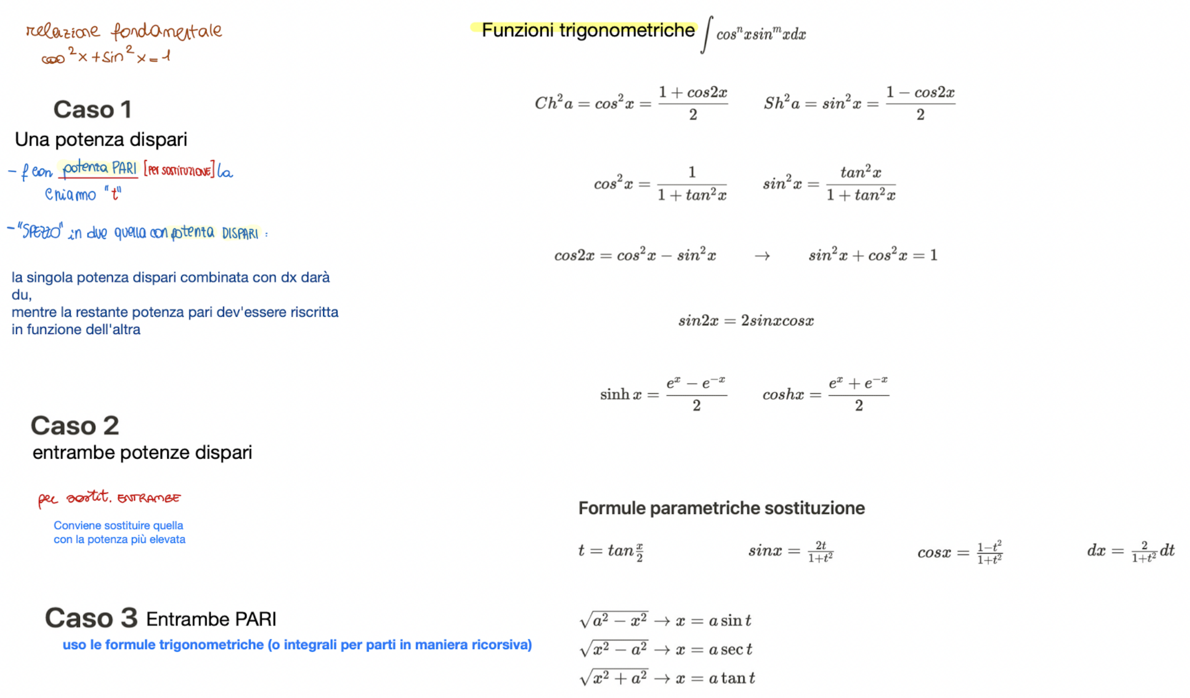
$f'(x) \rightarrow integro \rightarrow f(x)$
$g(x) \rightarrow derivo \rightarrow g'(x)$

Integrazione per sostituzione

Se f è una funzione continua e g è una funzione derivabile con derivata continua, allora:

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = \begin{bmatrix} posto \\ g(x) = v \\ g'(x)dx = dv \end{bmatrix} = \int f(v)dv$$

Funzioni trigonometriche


relazione fondamentale
$cos^2 x + sin^2 x = 1$

Caso 1
Una potenza dispari
- f con potenza PARI [per sostituzione] la chiamo "t"
- "spezzo" in due quella con potenza DISPARI:

la singola potenza dispari combinata con dx darà du,
mentre la restante potenza pari dev'essere riscritta in funzione dell'altra

Caso 2
entrambe potenze dispari
per sostit. ENTRAMBE
Conviene sostituire quella con la potenza più elevata

Caso 3 Entrambe PARI
uso le formule trigonometriche (o integrali per parti in maniera ricorsiva)

Funzioni trigonometriche $\int cos^n x sin^m x dx$

$$Ch^2 a = cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2} \qquad Sh^2 a = sin^2 x = \frac{1 - cos2x}{2}$$

$$cos^2 x = \frac{1}{1 + tan^2 x} \qquad sin^2 x = \frac{tan^2 x}{1 + tan^2 x}$$

$$cos2x = cos^2 x - sin^2 x \quad \rightarrow \quad sin^2 x + cos^2 x = 1$$

$$sin2x = 2sinxcosx$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Formule parametriche sostituzione

$t = tan\frac{x}{2}$ $\quad sinx = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a\sin t$
$\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a\sec t$
$\sqrt{x^2 + a^2} \rightarrow x = a\tan t$

Caso 3 - Entrambe le potenze sono pari

Occorre utilizzare le seguenti formule trigonometriche - oppure integrare per parti in maniera ricorsiva.

$$Ch^2 a = cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2} \qquad Sh^2 a = sin^2 x = \frac{1 - cos2x}{2}$$

$$cos^2x = \frac{1}{1+tan^2x} \qquad sin^2x = \frac{tan^2x}{1+tan^2x}$$

$$cos2x = cos^2x - sin^2x \qquad \rightarrow \qquad sin^2x + cos^2x = 1$$

$$sin2x = 2sinxcosx$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Formule parametriche sostituzione

$t = tan\frac{x}{2}$ $\qquad sinx = \frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a\sin t$

$\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a\sec t$

$\sqrt{x^2 + a^2} \rightarrow x = a\tan t$

Integrazione di funzioni razionali fratte

A(x) e B(x) sono polinomi in x

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

Integrazione di funzioni razionali fratte $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

1 **grado di A(x)≥ g. B(x)**

- divisione tra polinomi
- $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$
- $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\cancel{B(x)} \cdot Q(x)}{\cancel{B(x)}} + \frac{R(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$
- $\int \frac{A(x)}{B(x)} = \int Q(x) + \int \frac{R(x)}{B(x)}$

2 **grado di A(x)<g. B(x)**

1 g. B(x) = 1

$B(x) = px + q$ significa g. di A(x) = 0 ⇒ costante

$$\int \frac{c}{px+q}\,dx = \frac{c}{p} \ln|px+q| + k$$

2 Denominatore di 2° grado $\qquad$ g. B(x) = 2

⇒ grado di A(x) $= 0$ / $\rightarrow A(x) = px + q$

$B(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ Calcolo il determinante

CASI 1 2 3

3 Denominatore B(x) g. > 2

- semplifico
- Ruffini

1 $\Delta > 0$ x_1, x_2

- $B(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
  $\rightarrow$ Scomposizione di $B(x)$
- $\dfrac{A(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{\alpha}{a(x-x_1)} + \dfrac{\beta}{(x-x_2)}$
- TROVARE α e β, svolgere il sistema dopo aver impostato l'equaz.:
  $a(x-x_1) + \beta(a(x-x_1)) = A(x)$
- Risolvo $\displaystyle\int \frac{\alpha}{a(x-x_1)} + \frac{\beta}{(x-x_2)}\,dx =$
  $\dfrac{\alpha}{a} \ln|x-x_1| + \beta \ln|x-x_2| + c$

2 $\Delta = 0$ $x_1 = x_2$

scompongo den. $B(x) \rightarrow B(x) = a(x-x_1)^2$

- se $A(x) = K$ è una costante
  $A(x) = K \rightarrow \displaystyle\int \frac{K}{a(x-x_1)^2}\,dx = \frac{K}{a}\int (x-x_1)^{-2}\,dx = \frac{K}{a}\,\frac{(x-x_1)^{-1}}{-1} + c$
- Se $A(x) = px+q$ $A(x) = px+q \rightarrow$
  $\displaystyle\int \frac{px}{a(x-x_1)^2}\,dx + \int \frac{q}{a(x-x_1)^2}\,dx$

  px : il numeratore deve corrispondere alla derivata del denominatore $B(x)$

3 $\Delta < 0$ NO SOLUZIONI

metodo 1 cerco di avere num. px = derivata $B(x)$ poi risolvo l'$\int$

metodo 2 scompongo il DENOMINATORE $B(x) \Rightarrow B(x) = 1 + (sx+t)^2$

- Se $A(x) = K \rightarrow$ è una costante $\displaystyle\int \frac{K}{1+(sx+t)^2}\,dx =$
  - $\dfrac{K}{s}\displaystyle\int \frac{s}{1+(sx+t)^2}\,dx = \frac{K}{s}\operatorname{arctg}(sx+t) + c$
  - $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{k} + c$
  - $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{k^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}\frac{f(x)}{k} + c$
- Se $A(x) = px+q =$
  $\displaystyle\int \frac{px}{1+(sx+t)^2}\,dx + \int \frac{q}{1+(sx+t)^2}\,dx$

[DIVISIONE TRA POLINOMI]

▼ **Procedimento**

1. Disporre i singoli termini dei due polinomi in tabella, riportando anche i segni di ciascun termine.

   Ordiniamo entrambi i polinomi secondo le potenze decrescenti dell'indeterminata

   $$P(x) = x^4 + 2x^2 + x - 1$$

   $$D(x) = x^2 + x + 1$$

2. Se P(x)è un polinomio non completo scrivere al posto dei termini mancanti uno zero nella posizione corrispondente in tabella.
   POLINOMIO COMPLETO: Un **polinomio** si dice **completo** rispetto ad una lettera se, in esso, compaiono **tutte le potenze di quella lettera , da quella di grado massimo a quella di grado zero.**
3. Dividere il termine di grado massimo di P(x) per il termine di grado massimo di D(x), e riportiamo il risultato nella tabella sotto a D(x)

   $$\begin{array}{ccccc|ccc} +x^4 & 0 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\ \cline{6-8} & & & & & +x^2 & & \end{array}$$

4. Moltiplicare il risultato del punto 3 per ciascuno dei termini del polinomio D(x)

5. Invertiamo i segni dei risultati e riportiamoli al di sotto del polinomio P(x), in corrispondenza dei termini con lo stesso **grado**.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
+x^4 & 0 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & +x^2 & & \\
\cline{1-5}
\end{array}
$$

6. Svolgere somma e differenza tra monomi in colonna a sinistra e riportarne i risultati sempre a sinistra.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
+x^4 & 0 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & \downarrow & \downarrow & +x^2 & & \\
\cline{1-5}
// & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & & & \\
\end{array}
$$

7. Ripetere i procedimenti
8. **Dobbiamo fermarci quando il grado del termine di grado massimo in basso a sinistra è minore del termine di grado massimo del divisore D(x) .**
9. e moltiplichiamolo per tutti i termini di D(x), cambiando i segni dei risultati e riportandoli al di sotto del polinomio in basso a sinistra

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
+x^4 & 0 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & \downarrow & \downarrow & +x^2 & -x & \\
\cline{1-5}
// & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & & & \\
 & +x^3 & +x^2 & +x & & & & \\
\cline{1-5}
\end{array}
$$

10. Calcoliamo le operazioni in colonna

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
+x^4 & 0 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & +x^2 & -x & \\
\cline{1-5}
// & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & & & \\
 & +x^3 & +x^2 & +x & \downarrow & & & \\
\cline{1-5}
 & // & +2x^2 & +2x & -1 & & & \\
\end{array}
$$

11. Poiché il grado di $2x^2$ (termine di grado max del pol. in basso a sinistra) **non** è minore del grado di x^2 (termine di grado max del divisore D(x), possiamo continuare il procedimento.
12. Diviso $2x^2$ per x^2 → $+2$. Lo scrivo nella colonna destra accanto al $-x$. Moltiplico questo valore per tutti i termini del D(x), cambiano i segni dei risultati e riportandoli nella colonna di sinistra.
    Svolgo le operazioni in colonna

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
+x^4 & 0 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & \downarrow & \downarrow & +x^2 & -x & +2 \\
\cline{1-5}
// & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & & & \\
 & +x^3 & +x^2 & +x & \downarrow & & & \\
\cline{1-5}
 & // & +2x^2 & +2x & -1 & & & \\
 & & -2x^2 & -2x & -2 & & & \\
\cline{1-5}
 & & // & // & -3 & & &
\end{array}
$$

13. Ci **fermiamo** perché il grado di -3 è zero ed è minore del grado di x^2
14. Il p. nella parte destra, sotto al D(x) è il quoziente Q(x) della divisione. ($x^2 - x + 2$)
15. Il p. nella parte bassa a sinistra è il resto della divisione ($R(x) = -3$)
16. Possiamo esprimere la divisione con resto:
    $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$

R(x) → resto della divisione.

Q(x) → quoziente (risultato) della divisione.

$$A(x) = B(x) * Q(x) + R(x)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\cancel{B(x)} * Q(x)}{\cancel{B(x)}} + \frac{R(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} = \int Q(x) + \int \frac{R(x)}{B(x)}$$

▼ Esempio

(6) $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 - 2x - 3}\,dx$ $\qquad A(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ $\qquad \partial A \geq \partial B$

$\Delta < 0$

Divisione tra polinomi

Divido il termine di grado massimo di sinistra con il termine di grado massimo di destra (sempre lo stesso)

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 5 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline -x^4 + 2x^3 + 3x^2 & x^2 + 2x + 4 \\ // \; 2x^3 + 0x^2 + 0x + 5 & \\ -2x^3 + 4x^2 - 6x & \\ // \; 4x^2 - 6x + 5 & \\ -4x^2 + 8x + 12 & \\ // \; 2x + 17 & \end{array}$$

$$A(x) = (x^2 + 2x + 4)\underbrace{(x^2 - 2x - 3)}_{B(x)} + (14x + 17)$$

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} = \int x^2 + 2x + 4\,dx + \int \frac{14x + 17}{x^2 - 2x - 3}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + \int \frac{14x + 17}{x^2 - 2x - 3}\,dx$$

$B(x) = x^2 - 2x - 3$

$\Delta > 0$

$(x-3)(x+1)$

$$\frac{14x + 17}{(x-3)(x+1)} = \frac{\alpha}{(x-3)} + \frac{\beta}{(x+1)} \rightarrow \alpha(x+1) + \beta(x-3) = 14x + 17$$

$$\alpha x + \alpha + \beta x - 3\beta = 14x + 17$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 14 \\ \alpha - 3\beta = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -3/4 \\ \alpha = 17 + 3\left(-\frac{3}{4}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -3/4 \\ \alpha = \frac{59}{4} \end{cases}$$

$// \; 4\beta = -3$

$$\frac{14x + 17}{(x-3)(x+1)} = \frac{59/4}{(x-3)} + \frac{(-3/4)}{x+1}$$

$$\int \frac{14x + 17}{(x-3)(x+1)}\,dx = \frac{59}{4}\int \frac{1}{(x-3)}\,dx - \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{59}{4}\ln|x-3| - \frac{3}{4}\ln|x+1| + c$$

RISULTATO: $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + \frac{59}{4}\ln|x-3| - \frac{3}{4}\ln|x+1| + c = \int \frac{x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 - 2x - 3}\,dx$

Integrazione di funzioni irrazionali per sostituzione

1. Le funzioni irrazionali della forma:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

con *ad - bc ≠ 0* (se *ad-bc = 0* l'espressione si riduce ad una costante), si **razionalizzano** mediante la sostituzione:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

Osserviamo che le funzioni razionali del tipo

$$\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Si razionalizzano ponendo *n* = *m.c.m* $\{n_1, n_2, n_p\}$

$$\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}} = (\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})^{\frac{n}{n_1}}$$

2. Analogamente, le funzioni del tipo

$$\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[n_p]{ax+b}, \sqrt[n]{x}, \sqrt[n_p]{x}$$

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \quad dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$$

da cui:

$$\int \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}dx = \int \frac{dt^n - b}{a-ct^n}\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt =$$

▼ Esempio

$$\int \frac{2x}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$$

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$$

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$\int \frac{2x}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{2\frac{1+t^2}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}+1}t\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$4\int \frac{t^4+t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

Effettuando la divisione tra polinomi:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t^2)^2} = 1 + \frac{3t^2-1}{(1-t^2)^2} \rightarrow 4\int 1 + \frac{3t^2-1}{(1-t^2)^2}dt$$

$$4t + 4\int \frac{3t^2-1}{(1-t^2)^2}dt$$

$$\frac{3t^2-1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}$$

$$A = 1, B = \frac{1}{2}, C = -1, D = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{2x}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 4t + 4ln|t-1| - \frac{2}{t-1} - 4ln|t+1| - \frac{2}{t+1} + c$$

$$4\frac{t^3-2t}{t^2-1}+4ln|\frac{t-1}{t+1}|+c$$

$$2(x+3)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+4ln|\sqrt{x^2-1}-x|+c$$

3. Integrali di funzioni irrazionali della forma

$$\int\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad \frac{1}{mx+n}=t$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

Con $b^2-4ac\neq 0$. Distinguiamo il caso a > 0 dal caso a < 0.

Se a > 0 la funzione $\sqrt{ax^2+bx+c}$ è definita su tutto $\Re$ se $b^2-4ac<0$, mentre è definita per valori esterni all'intervallo delle radici del polinomio ax^2+bx+c se $b^2-4ac>0$.

Se a < 0 la funzione $\sqrt{ax^2+bx+c}$ è definita solo se $b^2-4ac>0$ ed ha per dominio l'intervallo $[x_1,x_2]$ dove x_1e x_2 sono le radici di ax^2+bx+c

3.1 a > 0

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}(x+t)$$

Oppure:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$$

Oppure se c > 0

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}-tx$$

▼ Esempio

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$$

$$\sqrt{x^2-2}=t-x\rightarrow t=\sqrt{x^2-2}+x$$

$$(t-x)^2=x^2-2\rightarrow t^2-2tx+x^2=x^2-2\rightarrow x=\frac{t^2+2}{2t}$$

$$x=\frac{t^2+2}{2t}, \quad dx=\frac{t^2-2}{2t^2}$$

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=\int\frac{2}{t^2-2t+2}dt$$

$$t^2-2t+2=(t^2-2t+1)+1=(t-1)^2+1$$

$$\int\frac{2}{(t^2-2t+2)}=2arctg(t-1)+c=2arctg(\sqrt{x^2-2}+x-1)+c$$

(A) Se $b^2 - 4ac > 0$ e dunque $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, dove x_1 e x_2 sono le radici di $ax^2 + bx + c$, si ottiene:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \sqrt{a}|x - x_1|\sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}}$$

dove il segno di $x - x_1$ dipende dall'insieme di definizione della funzione:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \to \sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}} = t$$

▼ Esempio 1.1

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{(x-1)(x-2)} = |x-1|\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \int \frac{dx}{(x-1)|x-1|\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)|x-1|}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx$$

Se x < 1:

$$-\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx$$

Se x > 2:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx$$

In entrambi i casi si pone $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = t$

(B) Se $b^2 - 4ac < 0$ e la funzione razionale *f* è "semplice" nella variabile x a volte ci si può ricondurre, dopo aver completato il quadrato nelo polinomio radicando, ad un integrale risolvibile mediante una sostituzione trigonometrica inversa della tangente:

▼ Esempio 1.2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$x^2 - 2x + 5 = (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x+1)^2 + 4$$

Posto $t = x + 1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

e quindi, posto $t = 2tg\theta \rightarrow dt = 2sec^2\theta d\theta$ e $\sqrt{t^2+4} = 2sin\theta$

risulta:

$$\int \frac{2sec^2\theta}{2sec\theta} d\theta = \int sec\theta d\theta = ln|sec\theta + tg\theta| + c$$

$$ln|\frac{\sqrt{t^2+4}}{2} + \frac{t}{2}| + c = ln|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2} + \frac{x+1}{2}| + c + c = ln|\sqrt{x^2+2x+5} + x + 1| + c$$

3.2 a < 0

La funzione $\sqrt{ax^2+bx+c}$ esiste solo se è $b^2 - 4ac > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{-a}|x-x_1|\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}$$

La funzione si può razionalizzare ponendo: $\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}} = t$

▼ Esempio 2.1

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

La funzione $\sqrt{1-x^2}$ è definita per $x \in [-1;1]$, inoltre essendo

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{-(x-1)(x+1)} = \sqrt{(1-x)(x+1)} = |1-x|\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

Posto $t = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$si ottiene

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$$

e quindi per $|1-x| = 1-x$ per ogni $x \in [-1;1]$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{(1+x^2)(1-x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = -\int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

Da cui essendo $1+t^4 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$

$$\frac{1+t^2}{1+t^4} = \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

Si ottiene $A = 0, B = \frac{1}{2}, C = 0, D = \frac{1}{2}$

Risultato:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} arctan(\sqrt{\frac{2(x+1)}{1-x}} + 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} arctan(\sqrt{\frac{2(x+1)}{1-x}} - 1) + c$$

Osserviamo che spesso, quando la funzione f è "semplice" nella variabile x, è conveniente completare il quadrato sotto radice e ricondursi ad un integrale elementare o ad un integrale risolvibile mediante una sostituzione trigonometrica inversa del seno.

- Esempio 2.2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$$

Completando il quadrato sotto radice si ottiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} arcsin(\frac{4x-3}{5}) + c$$

- Esempio 2.3

$$\int \sqrt{x-x^2}dx$$

Essendo $x-x^2 = \frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2$, posto $t = x - \frac{1}{2}$, si ha

$$\int \sqrt{x-x^2}dx = \int \sqrt{\frac{1}{4} - t^2}dt$$

Da cui posto $t = \frac{1}{2}sen\theta$, essendo $dt = \frac{1}{2}cos\theta d\theta$, $\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} = \frac{1}{2}cos\theta$

$$\frac{1}{4}\int cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}(\theta + sin\theta cos\theta) + c$$

$$= \frac{1}{4}(arcsin(2x-1) + 2(2x-1)\sqrt{x-x^2}) + c$$

Completando il quadrato sotto radice si ottiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} arcsin(\frac{4x-3}{5}) + c$$

Osservazione

Gli integrali della forma

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Si calcolano più facilmente tenendo conto del fatto che mediante semplici passaggi algebrici ci si può ricondurre al calcolo della seguente somma di integrali:

$$K\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + L\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Con **K** e **L** costanti.

- Esempio

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = -\int \frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = ...$$

Proprietà integrali definiti

$$F(x) = \int_{h(x)}^{x_0} f(t)dt \to F(x) = -\int_{x_0}^{h(x)} f(t)dt$$

Integrale definito $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

Se gli estremi di integrazione sono uguali allora l'integrale è zero. Pertanto l'equazione:

$$\int_1^{\arctan(x)} \frac{1}{e^{t^2-t}} dt = 0$$

regole integrali impropri

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\,dx$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ → converge se $\alpha > 1$ → diverge se $\alpha \leq 1$
	$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$ → converge se $\beta < 1$ → diverge se $\beta \geq 1$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

in $x = a$ ASINTOTO VERTICALE

$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b g(x)\,dx$ ⇒

1 $\exists$ finito → $\int_a^b f(x)$ converge

2 $\exists\ \infty$ → $\int_a^b f(x)$ diverge

3 $\nexists$ → $\int_a^b f(x)$ indeterminato

in $x = b$ ASINTOTO VERTICALE

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ $\qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

si spezza l'int. prendendo un punto c nell'intervallo $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^c f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

Convergenza = limite finito
- → criterio del confronto
- → conf. asintotico
- → $\int_2^\infty f(x) = \ldots \underset{x\to+\infty}{\ldots} \ldots = n$ → diverge / converge

Integrali impropri limitati

▼ **Integrale improprio**

Chiamato improprio o **generalizzato**, è il limite di un integrale definito al tendere di un estremo di integrazione (o entrambi) ad un **numero reale** oppure all'infinito; questo numero reale può appartenere all'**insieme di definizione della funzione integranda**, in tal caso si ottiene lo stesso risultato che si ha calcolando un integrale definito, oppure può rappresentare **un punto di discontinuità.**

Si utilizzano per calcolare integrali su intervalli **illimitati** e\o funzioni non limitate, non trattabili con l'integrale di Riemann.

Richiede la limitatezza sia per l'intervallo di integrazione,

Un integrale improprio è un limite della forma:[3]

Modifica la sezione Definizione

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

oppure:

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Un integrale è improprio anche nel caso in cui la funzione integranda non è definita in uno o più punti interni del dominio di integrazione.

Definizione: sia f : [a,+∞) → R una funzione integrabile secondo Riemann negli intervalli del tipo [a,c] per ogni c≥a. Definiamo l'**integrale improprio di prima specie della funzione f su [a,+∞)** il limite dell'integrale definito di f su [a,c]

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx$$

Se il limite al secondo membro esiste finito diremo che la funzione f è **integrabile impropriamente su [a,+∞)**, o che l'integrale improprio converge al valore del limite, o ancora che esiste l'integrale generalizzato di f su [a,+∞).

Se il limite esiste ma è infinito diremo che **l'integrale improprio diverge**.

Se il limite non esiste diremo che **l'integrale improprio è oscillante**, oppure che non esiste.

Nel caso in cui il dominio di integrazione sia (-∞,b], e nelle ipotesi della definizione che abbiamo appena visto, scriveremo

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx$$

Integrali impropri di prima specie sulla retta reale

Nessuno ci impedisce di estendere la precedente definizione al caso degli **integrali impropri sull'asse reale**, cioè del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Per farlo è necessario richiedere che la funzione integranda f sia integrabile su qualsiasi intervallo chiuso e limitato. Scegliendo un generico punto

$$c \in (-\infty, \infty)$$

e considerando l'unione

$$(-\infty, c] \cup [c, +\infty)$$

si definisce

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

ossia, per definizione di integrale improprio di prima specie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{m \to -\infty} \int_{m}^{c} f(x)dx + \lim_{M \to +\infty} \int_{c}^{M} f(x)dx$$

Importantissimo: i due limiti della formula precedente sono indipendenti l'uno dall'altro, ecco perché abbiamo utilizzato due parametri distinti

$$m, M$$

RISOLUZIONE

Riscrivo il limite e risolvo l'integrale definito; calcolo il limite per c che tende a più (o meno) infinito

Caso 1:

Se l'intervallo $(a; b]$ è limitato, o la funzione è limitata, si parla di integrali impropri.

Caso 1.1:

$f \quad continua \quad (a; b] \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ a è un asintoto verticale

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

1. $\exists$ finito $\to \int_a^b f(x) \to$ converge
2. $\exists \quad \infty \to \int_a^b f(x) \to$ diverge
3. $\nexists \to \int_a^b f(x) \to$ indeterminato

Caso 2.1:

$f \quad continua \quad (a; b] \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$

Si spezza l'integrale prendendo un punto c nell'intervallo

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{c}^{b-\epsilon} f(x)dx$$

Tenere a mente

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

Se: $\alpha \geq 1$ diverge

Se: $\alpha < 1$ converge → $\frac{1}{\alpha-1}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx \quad \begin{cases} \nearrow \text{ converge se } \beta < 1, \\ \searrow \text{ diverge se } \beta \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \nearrow \text{ converge se } \alpha > 1, \\ \searrow \text{ diverge se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Stabilire se converge:

Criterio del confronto

$f, g \quad continue \quad (a; b] \qquad e \quad f, g \to_{x\to a} +\infty \qquad 0 \leq f(x) \leq g(x)$

(vanno all'infinito con due velocità diverse)

$$\int_a^b g \quad converge \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \quad converger\grave{a}$$

$$\int_a^b f \quad diverge \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g \quad diverger\grave{a}$$

Criterio del confronto asintotico

$f, g \quad continue \quad (a; b] \qquad e \quad f, g > 0 \quad f, g \to_{x\to a^+} +\infty \qquad f(x) \sim^{x\to a^+} g(x)$

$$\int_a^b f \quad converge \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b g \quad converge$$

f cambia segno ripetutamente

$f \quad continua \quad (a; b] \qquad f$ cambia segno per $x \to a^+$

$$\int_a^b |f(x)| \quad converge \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \quad converge$$

NON VICEVERSA.

Integrali impropri illimitati

▼ Domande teoriche

Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si consideri l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

Scegli un'alternativa:

a. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$, allora $I = +\infty$

b. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, allora I converge.

✖

c. Se $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$ allora I converge sicuramente.

d. Se $I = +\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) \geq 0$.

e. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$, allora I non converge.

Risposta errata.

La risposta corretta è: Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$, allora I non converge.

Caso 2.1:

$f \quad continua \in [a; +\infty) \quad e \quad limitata$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)dx$$

1. $\exists$ finito $\to \int_a^{+\infty} f(x) \to$ converge
2. $\exists \quad \infty \to \int_a^{+\infty} f(x) \to$ diverge
3. $\nexists \to \int_a^{+\infty} f(x) \to$ indeterminato

$f \quad continua \in (-\infty; b]$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{b} f(x)dx$$

Caso 2.2:

$f \quad continua \quad (-\infty; +\infty) \qquad \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad c \in I$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{c} f(x)dx + \lim_{R\to+\infty} \int_c^R f(x)dx$$

$\int A\exists, \int B\exists, \text{finiti} \ \to$ converge

Tenere a mente

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\beta} dx$$

Se: $\beta > 1$ converge

Se: $\beta \leq 1$ diverge → $\frac{1}{\beta-1}$

Il tutto si basa quindi sulla famiglia di integrali impropri notevoli:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \text{ oppure } \alpha = 1, \beta > 1 \\ \text{diverge se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1, \beta \leq 1 \end{cases}$$

Stabilire se converge:

Criterio del confronto

$f, g \quad continue \quad [a; +\infty) \qquad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a; +\infty)$

(vanno all'infinito con due velocità diverse)

$$\int_a^{+\infty} g \quad converge \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f \quad converger\grave{a}$$

$$\int_a^{+\infty} f \quad diverge \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} g \quad diverger\grave{a}$$

Criterio del confronto asintotico

$f, g \quad continue \quad [a; +\infty) \qquad e \quad f, g > 0 \quad f(x) \sim^{x\to+\infty} g(x)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad converge \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad converge$$

Se f(x) non è sempre positiva (oscilla)

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \quad converge \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad converge$$

$$x^\alpha e^{-x} \leq \frac{1}{x^2} \text{ definitivamente per } x \to +\infty$$

Integrali impropri in entrambi gli estremi

int. impropri in entrambi gli estremi

In questi casi si studia separatamente il comportamento in corrispondenza di ciascuno dei punti in cui un integrale presenta un comportamento “improprio”.

ex. integrale su $(-\infty, +\infty)$: verifico singolarmente sia l'integrale a $+\infty$, sia quello a $-\infty$

$\Rightarrow$ se entrambi convergono allora converge l'int. di partenza

① $$\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2(1+\sqrt{x})}\,dx = \int_{0}^{a} \frac{\arctan x}{x^2(1+\sqrt{x})}\,dx + \int_{a}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2(1+\sqrt{x})}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^{a} + \int_a^{+\infty}$$

se entrambi convergono allora converge l’int di partenza