Formulario Geometria Analitica

Indice: Vettori, Piano, Rette, Distanze, Volumi

Vettori

É un segmento orientato che ha *direzione*, *verso* e *modulo.*

Modulo di un vettore

→ lunghezza del segmento (*norma*)

$$||V|| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$$

Versore → vettore di modulo unitario =1 $\frac{v}{||v||}$

$$\overrightarrow{P_A P_B} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}$$

Prodotto di un vettore per un numero

Moltiplico ogni componente del vettore per il numero.

Formalmente lunghezza= $|\lambda| * ||v||$

Proprietà:

- omogeneità: $\lambda(uv) = (\lambda u)v$
- compatibilità: $||\lambda v|| = |\lambda| * ||v||$
- distributiva: $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad (\lambda + u)v = \lambda v + uv$

Somma tra due vettori

Sommo le componenti corrispondenti.

$v = v_{1i} + v_{1j} + v_{1k}$

$w = \dots$

$$v + w = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + (v_3 + w_3)$$

$$v - w = (v_1 - w_1) + (v_2 - w_2) + (v_3 - w_3)$$

Proprietà:

- commutativa: $v + w = w + v$
- associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $\exists$ elemento neutro: $z : \forall v + z = v \qquad z = 0 \rightarrow v + 0 = v$
- $\exists$ opposto: $\forall v \neq 0 \qquad \exists u : v + u = u + v = 0 \Rightarrow u = -v$

Prodotto scalare:

$v \cdot w = ||v|| * ||w|| * cos\alpha$

componente per componente
$v \bullet w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

Vettori perpendicolari: $v \cdot w = 0$

il loro prodotto scalare si annulla e viceversa:
$v_1 \bullet v_2 = 0 \longleftrightarrow v_1 \perp v_2$

Esempio: $v \cdot w = 0 \rightarrow v \perp w \rightarrow v * w * cos 90^\circ = 0$ con $v, w \neq 0$

Vettore v per se stesso

Il prodotto scalare di un **vettore v per se stesso** (l'angolo compreso è nullo) è uguale al quadrato del modulo di v:
$v \bullet v = |v|^2$

▼ Proprietà

- commutativa: $v \cdot w = w \cdot v$
- omogeneo: $(\lambda \cdot v) \cdot w = v \cdot (\lambda \cdot w) = \lambda \cdot (v \cdot w)$

- distributiva: $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- positività: $u \cdot u \geq 0$ e $u \cdot u = 0 \iff u = 0$
    - $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$

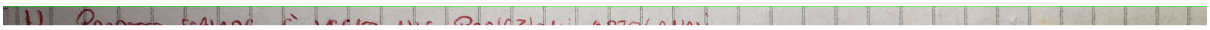
Determinare il coseno dell'angolo compreso tra v e w

1. $v \bullet w = X$
2. $\frac{v \bullet w}{|v| \bullet |w|} = \frac{|v| \bullet |w|}{|v| \bullet |w|} \bullet cos\theta \to cos\theta = \frac{v \bullet w}{|v| \bullet |w|} = N$
3. $\mathbf{N < 0} \Rightarrow cos\theta < 0 \to$ **ottuso**

Acuto: $\alpha < 90^\circ$

Ottuso: $\alpha > 90^\circ$

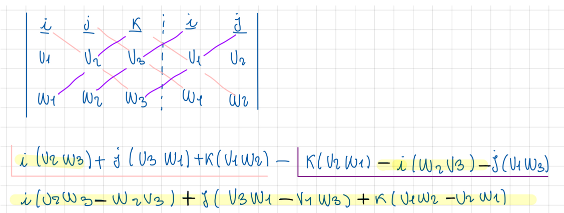
Proiezioni ortogonali



Proiezione ortogonale di un vettore nelle direzione di un altro

1. Dati u e v, decomporre u in due vettori: $u_1 \ e \ u_2$, il primo parallelo e u_2 perpendicolare a v
2. **Proiezione ortogonale di u nella direzione di v=** $\frac{u \bullet v}{v \bullet v} v$ **è la componete parallela a v**
3. Per trovare $u_2 = u - u_1$ che **è la componete perpendicolare a v**

Prodotto vettoriale $\quad v \wedge w = (v_2 w_3 - v_3 w_2) i + (v_3 w_1 - v_1 w_3) j + (v_1 w_2 - v_2 w_1) k$



Proprietà: $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \qquad w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$

$$v \wedge w = (v_2w_3 - v_3w_2)i + (v_3w_1 - v_1w_3)j + (v_1w_2 - v_2w_1)k$$

Prodotto che dà come risultato un vettore con direzione *perpendicolare* a entrambi.

Def. formale:

$$||v|| * ||w|| * sin\alpha$$

❗ **NOTA**: questa definizione corrisponde all'**area del parallelogramma** individuato da **v e w**, quindi $area(P) = |v \wedge w| = \sqrt{v \wedge w}$

Proprietà:

- anticommutativa: $v \wedge w = -w \wedge v$
- ...
    - omogeneità: $(\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w) = \lambda(v \wedge w)$
    - distributiva: $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$

> ❗ Se $v \wedge w = 0 \Rightarrow$ sono **paralleli** $v \parallel w$
> .... quindi $(v = \lambda w) \rightarrow w * v * sin0 = 0$

Vettori paralleli: $v \wedge w = 0$

Inoltre:

> ❗ Due vettori sono **paralleli** se **è possibile ottenere l'uno dall'altro tramite moltiplicazioni per un numero**

ad esempio

$v = (3, 2, -5)$ è parallelo a $w = (30, 20, -50)$ e $z = (-3, -2, 5)$, perché $w = 10 \cdot v$ e $z = (-1) \cdot v$.

Vettori ortogonali

Per verificare se due vettori sono **ortogonali** si utilizza il **prodotto scalare**.

> ❗ Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero: $f \cdot g = 0 \Rightarrow$ ortogonali

$a = (3, 2, 1)$, $b = (1, 1, -6)$, da

$a \cdot b = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-6) = 6 - 6 = 0.$

Proprietà prodotto vettore:

$$\begin{cases} v \perp j \\ v \perp QP \end{cases} \rightarrow v = j \wedge QP$$

Prodotto misto: $u \cdot (v \wedge w)$

Si esegue sempre **prima il prodotto vettoriale**
$v \wedge w$

Proprietà:

- ciclico: $u \cdot v \wedge w = v \cdot w \wedge u = w \cdot v \wedge u$
- $u \cdot v \wedge w = 0 \iff u, v, w$ complanari (giacciono sullo stesso piano)
- $u \cdot v \wedge w \neq 0 \iff ||u \cdot v \wedge w|| =$ **volume parallelepipedo**

Area della figura tra due vettori: $||v \wedge w||$

Volume della figura: $||v \wedge w \cdot u||$

Piano

Equazione Cartesiana del piano: $\beta : ax + by + cz = d$

$P(xo; yo; zo) \qquad d = ax_0 + by_0 + cz_0$

- Piano verticale ($0k$ e non z):
  vettore perpendicolare orizzontale $ai + bj + 0k$,
  piano verticale di equazione $ax + by = d$. È parallelo all'asse z.
- Piano orizzontale (ck):
  vettore perpendicolare verticale, nella forma $0i + 0j + ck$,
  l'equazione di β è allora $cz = d$. $\beta : z = \ldots$
  Un piano orizzontale passante per un punto, ha in comune con il punto solo la coordinata z.
- Piano parallelo a y: il versore del piano è perpendicolare al versore j (retta y)
- Piano passante per l'origine: la $d = 0$

Piani particolari

- Piano $xy = ax + by + d = 0$

Piano parallelo a un asse coordinato

- $ax + by + d = 0$ è un piano parallelo all'asse z
  - $ax + by = 0$ è un piano che contiene l'asse z

Piano parallelo a un piano coordinato

- $cz + d = 0$ è parallelo al piano xy
  - Piano xy ha equazione cartesiana $z = 0$
- $z = k$ $||$ al piano xy

- $y = k$ $||$ al piano xz
- $x = k$ $||$ al piano yz

Due piani

$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

Possono essere:

- coincidenti: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$
- paralleli: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ oppure $(a+b+c) = \lambda(a+b+c)$
- incidenti: $\nexists \quad (v_1) : \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = (v_2) : \lambda \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$
- perpendicolari: $v_1 \cdot v_2 = 0$

https://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/geometria-dello-spazio/2642-posizione-tra-retta-e-piano.html

Posizioni retta r -piano a nello spazio:

- r ***parallela*** *ad* α, **non** hanno punti in comune;
- r ***incidente*** *il* α, quando ha uno e un solo punto in comune con esso;
- r ***giacente\contenuta*** *nel* α (parallela interna), ∞ punti in comune, tutti i punti della r appartengono al piano.

In altri termini,

una retta ed un piano possono avere nessuno, infiniti o un solo punto in comune.

Studio della posizione tra retta e piano tramite i coefficienti direttori

Note le equazioni di piano e retta, che siano in forma parametrica o in forma cartesiana, troviamo i coefficienti direttori del piano e determiniamo i parametri direttori della retta.

- $\mathbf{n} = (a, b, c)$ è il vettore le cui componenti sono i parametri direttori del piano α,
- $\mathbf{v} = (l, m, n)$ vettore direzione retta r.
- P_0 punto qualsiasi di r, • = prodotto scalare tra vettori:

1. Se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $P_0 \notin \alpha$ retta e piano sono **paralleli**
2. Se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ retta e piano incidenti
3. Se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $P_0 \in \alpha$ la retta è contenuta nel piano

▼ ESEMPIO

$\alpha: \; x + 5y - 3z + 5 = 0$

$r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

e determiniamone la reciproca posizione ricorrendo al metodo dei vettori direzione.

Svolgimento: il vettore dei coefficienti direttori del piano associato all'equazione cartesiana è

$\mathbf{n} = (1, 5, -3)$

Per ricavare un vettore direzione della retta calcoliamo il prodotto vettoriale delle direzioni normali dei due piani che la definiscono, ossia

$\mathbf{v}_r = (1, -1, 0) \times (0, 2, -1) = (1, 1, 2)$

Il prodotto scalare tra i vettori direzione di piano e retta è nullo

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_r = (1, 5, -3) \cdot (1, 1, 2) = 1 + 5 - 6 = 0$

Nota: **Come ricavare un vettore direzione della retta in questa forma:**

$$r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

calcolo il prodotto vettoriale delle direzioni normali dei due piani che la definiscono, ossia

$$\mathbf{v}_r = (1, -1, 0) \times (0, 2, -1) = (1, 1, 2)$$

Piano passante per un punto, piano perpendicolare a un dato vettore

Equazione del piano β perpendicolare al vettore u e passante per il punto A

MODO 1:

1. $\vec{AP} = P - A = \text{non ho P, ne uso uno generico} = (x - x_a)(y - y_a)(z - z_a)$
2. impongo $u \cdot \vec{AP} = 0$ e svolgo i calcoli

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 3 \\ z + 2 \end{bmatrix} = 7x + 3y - 2z - 20 = 0$$

MODO 2:

1. conosco u, il vettore perpendicolare a $\beta \rightarrow$
   $u = \ldots \rightarrow \; = d$
2. determino d imponendo che questa equazione venga soddisfatta dalle coordinate di A

$\beta : eq. \, u = 20$

Equazione cartesiana del piano con due vettori e un punto

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \qquad v = l_1 i + m_1 j + n_1 k \qquad w = l_2 i + m_2 j + n_2 k$$

Dato che v, w sono paralleli al piano possiamo utilizzarli per determinare le componenti di un vettore ortogonale al piano, e dunque risalire all'equazione cartesiana. La direzione ortogonale è individuata dal prodotto vettoriale tra v e w

$$v \wedge w = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

Svolgimento: anzitutto osserviamo che $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, infatti la matrice che ha per righe (o per colonne) le componenti dei due vettori ha rango massimo

$$\text{rk}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Possiamo allora risalire a un vettore ortogonale al piano calcolando il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\ \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{j}\ \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{k}\ \det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

I coefficienti a, b, c dell'equazione cartesiana del piano sono le componenti del vettore ortogonale appena calcolato, dunque possiamo iniziare a comporla

$$5x - 3y + 3z + d = 0$$

Imponiamo il passaggio per il punto $P(-2, 3, 1)$

$$5(-2) - 3(3) + 3(1) + d = 0$$

e ricaviamo il valore del parametro d risolvendo la precedente equazione

$$-10 - 9 + 3 + d = 0 \ \rightarrow \ d = 16$$

In definitiva il piano ha equazione

$$5x - 3y + 3z + 16 = 0$$

▼ Piano passante per due punti (punto P e Q) e parallelo all'asse y

Il piano è $\parallel$ all'asse y e contiene il segmento $\overrightarrow{QP}$, quindi il suo vettore perpendicolare v dev'essere contemporaneamente perpendicolare all'asse y e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{QP}$, allora il vettore direzione del piano sarà $v = j \wedge QP = 6i - 3k$ (*per le proprietà del prodotto vettore*).

$$\beta : 6x - 3z = d$$

Per ricavare la d, imponiamo il passaggio per uno dei due punti.

$$P(5, 7, 11) \qquad Q(2, 1, 5)$$
$$d = 6 * 5 - 3 * 11 = -3$$
$$\beta : 6x - 3z = -3$$

Piano passante per due punti (punto P e Q) e parallelo all'asse y

Piano parallelo ad un asse e contenente due punti (il segmento).
Il suo vettore perpendicolare è cont. perpendicolare all'asse e al vettore, il vettore direzione del piano sarà: $v = j \wedge QP$ e $\beta : x - z = d$

d= impongo il passaggio per uno dei due punti P o Q (sostituendo nell'eq di B)

$\beta : x - z = D$

▼ Piano passante per un punto, parallelo a un piano dato

Piani paralleli $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$

Equazione del piano β parallelo al piano $x - 2y + 3z = 20$ e

passante per il punto P$(1; 2; -5)$

$$d = 1 * 1 - 2 * 2 + 3 * (-5) = -18$$

$$\beta : x - 2y + 3z = -18$$

Piano passante per un punto, parallelo a un piano dato

Piani paralleli $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$

Equazione del piano β parallelo al piano α di e passante per il punto P$(p_x, ...)$

$$d = eq.\alpha(p_x, p_y, p_z) \qquad\qquad \beta : eq.\alpha = d$$

Piano passante per una retta e parallelo a un'altra retta (contenente una retta)

Scrivere l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ contenente il punto $P(6, 1, 1)$ e la retta

$$\mathfrak{r} : \begin{cases} x + 2z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}.$$

Piano contenente il punto e la retta

Due metodi di risoluzione:

A

1. Vettore direzione della retta e un punto Q ad essa appartenente,
2. pongo z=t nelle eq. cartesiane di r e poi la trasformo in eq. parametrica.
3. trovo $\vec{QP}$ e il piano B sarà perpendicolare ai vettori v_re $\vec{QP}$ e passerà per P:
4. $v_B = v_r \wedge \vec{QP}$ = $5x - 6y + 8z = d$
5. trovo d e riscrivo 5x-6y+8z= valore di d

B

1. Il piano B appartiene al fascio F avente r come supporto: $f : \lambda(x + 2z - 2) + \mu(x - y - z - 3) = 0$

2. Sarà l'unico piano di F a passare per il punto P inserendo le coordinate di P in F avremo che $\mu = -6\lambda$
3. Ponendo nell'eq di F $\lambda = 1, \mu = -6$ ricavo l'eq. di B.

Uno degli assi è contenuto nel piano

$d = 0 \qquad \beta : ax + by + cz = 0$

- Contiene l'asse x: allora $a = 0$
- Contiene l'asse y: allora $b = 0$
- Contiene l'asse y: allora $c = 0$

Esempio: $x + 3z = 0$ contiene l'asse y poiché b = 0

Esempio: $P(5, 7, 11)$, β contiene l'asse x e passa per P.

$by + cz = 0 \to 7b + 11z = 0 \to b = 11, c = -7$

$$\beta : 11x - 7z = 0$$

Fasci di piani non paralleli

$$\mathcal{F} = \lambda(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + u(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$$

$\lambda, u \in \Re$ (numeri reali)

▼ Fascio di piani contenente i due piani e il punto $P(1, 2, 3)$

$$\beta_1 : x + y - z = 2 \qquad \beta_2 : 2x - y + 3z = 8$$

$$\lambda(x + y - z - 2) + u(2x - y + 3z - 8) = 0$$

Sostituisco le coordinate di P nell'equazione del β:

$$\lambda(1 + 2 - 3 - 2) + u(2 - 2 + 9 - 8) = 0$$

$u = 2\lambda$ supponiamo che $\lambda = 1$, $u = 2$

$$(x + y - z - 2) + 2(2x - y + 3z - 8) = 0$$

$(2 \cdot 2x) + 1x = 5x$

$(2 \cdot (-1)) + 1 = -1$ *ecc...*

$$\beta^* : 5x - y + 5z = 18$$

Fascio di piani contenente i due piani e il punto $P(1, 2, 3)$

β_1 *e* β_2, 1) $\lambda(\beta_1) + u(\beta_2) = 0$

Sostituisco le coordinate di P nell'equazione del β: 2) $\lambda(\beta_1(P)) + u(\beta_2(P)) = 0$

$u = n\lambda$ supponiamo che $\lambda = 1$, $u = n$ le sostituisco nell'equazione 1)

svolgo i calcoli e trovo β^*

Fasci di piani paralleli

$$Fascio: ax + by + cz = \lambda$$

$\lambda \in \Re$

▼ **Determinare l'equazione del fascio di piani paralleli al piano β**

$\beta : 2x + 3y - z = 3$, che contiene il punto $P(1, 1, 1)$

$d = 2 * 1 + 3 * 1 - 1 * 1 = 4$

$$\beta^* : 2x + 3y - z = 4$$

Determinare l'equazione del fascio di piani paralleli al piano β

$\beta : ..x + ..y.. + z = d$, che contiene il punto $P(x_p, y_p, z_p)$

$d = \beta(P)$

$$\beta^* : \beta = d$$

🍄 Piano passante per tre punti

Esempio (equazione cartesiana di un piano per tre punti non allineati)

Calcolare l'equazione cartesiana del piano cui appartengono i punti

$P_0(1,0,2),\ P_1(0,1,3),\ P_2(2,-1,0)$

Svolgimento: per determinare l'equazione cartesiana del piano imponiamo la condizione

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{pmatrix}=0$$

Sostituiamo le coordinate dei punti

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0-1 & 1-0 & 3-2 \\ 2-1 & -1-0 & 0-2 \end{pmatrix}=0$$

ed effettuiamo il calcolo

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}=0$$

Calcoliamo il determinante con la regola di Laplace, e in particolare con sviluppo rispetto alla prima riga

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=(x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-y\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+(z-2)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=(x-1)(-2+1)-y(2-1)+(z-2)(1-1)=$$

$$=-2x+x+2-1-2y+y=$$

$$=-x-y+1$$

Possiamo così concludere che l'equazione cartesiana del piano che contiene i punti assegnati è

$$-x-y+1=0$$

Parametri direttori di un piano in forma cartesiana e parametrica $n=(a,b,c)$

$$ax+by+cz+d=0$$

2) Il vettore dei parametri direttori del piano

$8x - z = 0$

è

$\mathbf{n} = (8, 0, -1)$

3) $\mathbf{n} = (0, 0, -3)$ è il vettore dei coefficienti direttori del piano

$-3z + 7 = 0$

Parametri direttori di un piano in forma parametrica

Il caso ben più interessante si presenta quando dobbiamo calcolare i parametri direttori dalle equazioni parametriche di un piano

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 s + l_2 t \\ y = y_0 + m_1 s + m_2 t \\ z = z_0 + n_1 s + n_2 t \end{cases}$$

dove s e t sono due parametri reali liberi, (x_0, y_0, z_0) sono le coordinate cartesiane di un punto del piano, e $\mathbf{v} := (l_1, m_1, n_1),\ \mathbf{w} := (l_2, m_2, n_2)$ sono due vettori linearmente indipendenti che esprimono due direzioni parallele al piano, e le cui componenti sono riferite alla base che definisce il sistema di riferimento.

In tal caso possiamo passare dalle equazioni parametriche all'equazione cartesiana del piano, oppure, procedere con un metodo più elegante, ma che può essere usato solo se siamo in un sistema di riferimento ortonormale.

Ricordando che il prodotto vettoriale tra due vettori linearmente indipendenti è, per definizione, ortogonale ai due vettori di cui si calcola il prodotto, il vettore dei parametri direttori di un piano in forma parametrica si ottiene dal prodotto vettoriale tra i vettori di giacitura $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ che definiscono le equazioni parametriche del piano, ossia

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

Punto simmetrico rispetto al piano

Calcolare il punto simmetrico rispetto ad un piano

Il simmetrico di un punto rispetto a un piano è il punto tale che: - appartiene alla retta perpendicolare al piano e passante per il punto ; - il punto di intersezione tra la retta e il piano è punto medio del segmento . Ovviamente, se il punto appartiene ad allora il simmetrico di è

https://www.youmath.it/forum/algebra-lineare/5155-calcolare-il-punto-simmetrico-rispetto-ad-un-piano.html

$$x_M) - x_P = (2 \cdot 3) - 1 = 6 -$$
$$y_M) - y_P = (2 \cdot 2) - 3 = 4 -$$
$$z_M) - z_P = (2 \cdot 0) - (-1) =$$

Punto simmetrico rispetto a un altro punto

Proiezione di un punto su una retta nel piano

- ricavare l'equazione della retta s passante per il punto P e ortogonale alla retta r;

- trovare il punto di intersezione tra la retta r e la retta s risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni.

In alternativa, si può usare la formula che fornisce le coordinate del simmetrico di un punto rispetto ad un altro, ottenendo:

$$P' = 2H - P = (2, 0, 2) - (2, -1, 3) = (0, 1, -1).$$

Rette nello spazio

Rette perpendicolari: $v_1 \cdot v_2 = 0$

prodotto scalare (componente per componente)

Rette parallele: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Equazione parametrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$P(x_0, y_0, z_0)$, $v = ai + bj + ck$

forma vettoriale:

$xi + yj + zk = (x_0 + at)i + (y_0 + bt)j + (z_0 + ct)k$

forma scalare:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

eq. parametrica

retta $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$

vettoriale $= \quad xi + yj = (1 + 2t)i + (2 - 7t)j$

scalare $= \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 7t \end{cases}$

Equazione generale

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Da generale a parametrica

forma generale $\quad \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

$$r1: \quad \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$r2$: equazione $x+y+n=z-y=m$

$$\begin{cases} x+y+n=m \\ z-y=m \end{cases} \xrightarrow{y=t} \begin{cases} // \\ y=t \\ // \end{cases} \overset{\dots}{\Rightarrow} \begin{cases} x=x_0+at \\ \\ \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \dots$$

FORMA GENERALE $\quad \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

$$r1: \quad \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{7} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$r2: \quad x+3y+1=z-y=2 \qquad \begin{cases} x+3y+1=2 \\ z-y=2 \end{cases} \xrightarrow{y=t} \begin{cases} x+3t+1=2 \\ y=t \\ z-t=2 \end{cases} \overset{\dots}{\Rightarrow} \overset{x=x_0+at}{\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=t+2 \end{cases}} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- se una tra x, y e z sono "fissati" non sono utilizzabili come parametri

  es. $z-3=6 \rightarrow z=9$ porrò $x=t$ ecc...

- il vett. direz. può anche essere moltiplicato ($\cdot 2$)

❗ Equazione cartesiana

Equazione cartesiana

[redacted]

Equazione cartesiana

Per individuare una retta r nello spazio sono sufficienti due punti distinti $P_0, P_1 \in r$ oppure, equivalentemente, un punto di passaggio e un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ parallelo a r, che ne definisce la direzione.

Sottolineiamo che le due situazioni sono equivalenti perché, come ben saprete, due punti distinti P_0, P_1 appartenenti a una retta ne individuano automaticamente la direzione

$$\overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0$$

e possiamo considerare come punto di passaggio, indifferentemente, P_0 oppure P_1.

$$v = li + mj + nk$$

Caso 1) Le componenti del vettore direzione sono tutte non nulle

se (l, m, n) del vettore v sono tutte $\neq 0$

allora si può scrivere l'equazione cartesiana della retta r con:

$\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ formula compatta di :

$$r : \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

Caso 2) Una componente del vettore direzione è nulla

2a) nel caso in cui

$$l = 0, \ m \neq 0, \ n \neq 0$$

le equazioni cartesiane della retta sono

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

2b) Se invece

$$l \neq 0, \ m = 0, \ n \neq 0$$

allora

$$r: \begin{cases} y = y_0 \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

2c) Infine, se

$$l \neq 0, \ m \neq 0, \ n = 0$$

allora

$$r: \begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} \end{cases}$$

Caso 3) Due delle tre componenti del vettore direzione sono nulle

3a) se

$$l = m = 0,\ n \neq 0$$

le equazioni cartesiane di r sono

$$r : \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

3b) Se

$$l = n = 0,\ m \neq 0$$

la rappresentazione cartesiana di r è

$$r : \begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

3c) Se

$$m = n = 0,\ l \neq 0$$

allora

$$r : \begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Da cartesiana a parametrica

Da cartesiana a parametrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

[redacted]

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Poniamo una variabile qualsiasi = t

$$x = t \rightarrow \begin{cases} z = t + 3y - 2 \\ y = 1 - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

Da parametrica a cartesiana

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$$

1. Scelgo una delle eq. da cui ricavare il valore di t, ovvero risolvo rispetto a t. (conviene quella dove il coefficiente di t=1)

   $t = \frac{x - xo}{a}$

2. Ricavato t, considero il sistema formato dalle restanti equazioni
3. Sostituisco la t in esse con il valore trovato in (2)
4. Svolgo il sistema=

$$\begin{cases} x = 2 - 3y - 3 \\ z = 5 + 5y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ -5y + z - 10 = 0 \end{cases}$$

Da parametrica a cartesiana CASI PARTICOLARI

1) $r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ essendo j=0, risolvo rispetto a t solo 1° e 3°

$$\begin{cases} x = x_o + a_t \\ z = z_0 + ct \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases} \rightarrow \dots \begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ t = \frac{z+3}{5} \\ y = 2 \end{cases}$$

$t = t \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{5} \Rightarrow 5x - 2z - 1 = y - 2 = 0$

2) $s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y - 4 = z - 1 = 0.$

x sarà libero di variare, s sarà composto da punti con y e z uguali a 4 e 1.

Due rette

$$A = \begin{pmatrix} x_r - x_s & y_r - y_s & z_r - z_s \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}$$

Gli elementi della prima riga sono dati dalla differenza delle coordinate dei due punti P_r, P_s. Le successive righe sono formate dalle componenti dei vettori direttori delle rette r, s, rispetto alla base che definisce il sistema di riferimento.

$A \neq 0$ rette **sghembe.** Ci fermiamo qui.

$A = 0$ rette **complanari.**

- coincidenti: $v_1 = \lambda v_2 \rightarrow \overrightarrow{P_1 P_2}$ è $\parallel$ a v_1 o a v_2
- parallele: $v_1 \parallel v_2 \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
- incidenti: 1 punto in comune
  1. sistema equazioni rette
  2. una sola soluzione, metodo sostituzione
  3. ricavo variabile
  4. sostituisco e avrò il punto in cui si intersecano.
- sghembe: nessun punto in comune (stanno su due piani diversi).
- perpendicolari: $v \perp v_1 = (a_1 * a_2) + (b_1 * b_2) + (c_1 * c_2) = 0$

  Geometricamente sono ortogonali se:
  - giacendo sullo stesso piano sono incidenti e formano quattro **angoli retti**,
  - appartengono a piani distinti tra loro ortogonali.

  quindi: anche due rette **sghembe** possono essere tra loro perpendicolari.

Da un punto di vista puramente geometrico due rette si dicono ortogonali se:

- giacendo sullo stesso piano sono incidenti e formano quattro angoli retti;

- appartengono a piani distinti tra loro ortogonali.

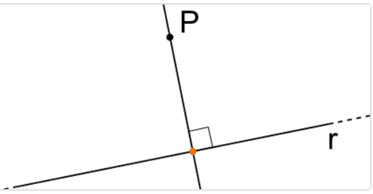
Da questa definizione vien fuori un'importantissima proprietà; anche due **rette sghembe possono essere tra loro perpendicolari**.

Proiezione di un punto su una retta

Proiezione di un punto su una retta

Con proiezione di un punto su una retta si intende, generalmente, la proiezione ortogonale del punto su una retta assegnata. Se è una retta qualsiasi e è un punto non appartenente alla retta, la proiezione del punto sulla retta è il piede della perpendicolare condotta da a .

https://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/7043-proiezione-di-un-punto-su-una-retta.html



Retta passante per due punti

Scegliamo le coordinate di uno dei due punti e come vettore direzione il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$

Esempio retta passante per $P(1,2,3)$ e $Q(2,1,-5)$

$\overrightarrow{PQ} = (1,-1,-8) = i - j - 8k$

Scegliamo il punto P

$$retta: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

❗ retta: [x, y, z]= [scelgo un punto tra i due]+ t[$\overrightarrow{PQ}$]

retta: $[x, y, z]$= [scelgo un punto tra i due]+ t[$\overrightarrow{PQ}$]

Retta parallela al vettore $v = i - j + k$ e passante per $P(1,4,-9)$

$$retta: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Retta parallela al vettore v e passante per un punto

$$retta: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [P] + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Retta parallela all'asse y passante per $P(2,4,-1)$

$v = 0i + j + 0k = j$

$$retta: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Retta parallela all'asse y passante per P

$$retta: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [P] + t\,[v]$$

Retta parallela a una retta data passante per $P(-10,3,2)$

$$retta: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$retta \parallel: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Retta parallela a una retta data passante per P

$$retta : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$retta \parallel : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [P] + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Retta passante per $P(7, 3, 5)$, incidente e perpendicolare all'asse x

- Per essere perpendicolari, il versore della retta v deve essere perpendicolare al versore dell'asse x $i \rightarrow v \cdot i = 0$
- La retta è incidente all'asse x, il che significa che deve passare per un punto dell'asse x, avente cioè coordinate $(x^*, 0, 0)$
- Poiché la retta è perpendicolare all'asse x, l'ascissa deve essere uguale a quella del punto, quindi $x^* = 7 \rightarrow P_2(7, 0, 0)$

La retta dovrà passare per il punto P e P_2

$\overrightarrow{P_2P} = (0, 3, 5)$

Scegliamo il punto P

$$retta : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Retta passante per $punto$, incidente e perpendicolare all'asse x

- Perpendicolari: versore retta $v_r \perp i$ $(v_{asse\ x})$ deve essere perpendicolare al versore dell'asse x $i \rightarrow v \cdot i = 0$
- La retta è incidente all'asse x, il che significa che deve passare per un punto dell'asse x, avente cioè coordinate $(x^*, 0, 0)$
- Poiché la retta è perpendicolare all'asse x, l'ascissa deve essere uguale a quella del punto, quindi $x^* = 7 \rightarrow P_2(7, 0, 0)$

La retta dovrà passare per il punto P e P_2

$\overrightarrow{P_2P} = (0, 3, 5)$

Scegliamo il punto P

$$retta : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Retta passante per P, incidente e perpendicolare all'asse x

- Per essere perpendicolari, il versore della retta v deve essere perpendicolare al versore dell'asse x $i \rightarrow v \cdot i = 0$
- La retta è incidente all'asse x, il che significa che deve passare per un punto dell'asse x, avente cioè coordinate $(x^*, 0, 0)$

- Poiché la retta è perpendicolare all'asse x, l'ascissa deve essere uguale a quella del punto, quindi $x^* = 7 \rightarrow P_2(7,0,0)$

La retta dovrà passare per il punto P e P_2

$\overrightarrow{P_2P} = (X)$

Scegliamo il punto P

$$retta: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [P] + t\,[X]$$

▼ Retta passante per P e perpendicolare all'asse y

La retta avrà equazione $y = k$ e sarà perpendicolare all'asse x⇒ il vettore direzione sarà i.

Impongo il passaggio per il punto $P(17, 19)$

> Una retta perpendicolare a y è parallela a x⇒ l'asse x ha equazione y=0

Retta passante per P e perpendicolare all'asse y

Retta perpendicolare a y = parallela a x⇒ l'asse x ha equazione y=0

La retta avrà equazione $y = k$ e sarà perpendicolare all'asse x⇒ il vettore direzione sarà i.

Impongo il passaggio per il punto $P(x, y)$

$$retta: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Due rette sono perpendicolari se:

a) lo sono i relativi vettori direzione

b) se $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$

Retta passante per un punto e perpendicolare a una retta

$3x + 4y = 12 \rightarrow$ **b**) $\rightarrow -4x + 3y = k$

$P_2(7,5)$. $\quad r_2 : 3x + 4y = 12$

impongo il passaggio per P e trovo k⇒ $4 \bullet 3 - 3 \bullet 5 = 13$

⇒ punto 7, 5 e $-4i + 3j$ vettore direzione.

Retta passante per P e perpendicolare a una retta

$3x + 4y = 12 \rightarrow$ **b**) $\rightarrow -4x + 3y = k$

$P_2(7,5)$. $\quad r_2 : 3x + 4y = 12$

impongo il passaggio per P e trovo k⇒ $4 \bullet 3 - 3 \bullet 5 = 13$

⇒ punto 7, 5 e $-4i + 3j$ vettore direzione.

@January 20, 2022 11:00 PM

1) S_1, passante per $P_1(3,10)$ e parallela a r_1: $y = 5x + 1$

1

CASO 1: due rette in forma CARTESIANA

$a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$

sono parallele se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

$=5$

$\neq$

quindi ogni retta parallela a r_1 avrà eq. $\boxed{y = 5x + K}$,

Per trovare S_1 devo individuare K, imponendo il passaggio per P_1

ossia per $P_1(3,10)$ $y = 10$, $x = 3$

SOSTITUISCO $\Rightarrow$ $10 = (5 \cdot 3) + K$ $\rightarrow$ $K = -5$

$$S_1: \; y = 5x - 5 \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1

m

$y = mx + q$

se la retta è $y = mx + q$ sost. $x = 0$
e trovo $y = q$
quindi i punti $(0, q)$

$$\begin{cases} y = 5x - 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = 0 \end{cases}$$

Caso 2: due rette in FORMA PARAMETRICA sono PARALLELE se i VETTORI DIREZIONE sono PROPORZIONALI e non coincidenti

per determinare l'eq. di (S_2)

(2) S_2, pas. $P_2(4,-2)$ e parallela a r_2: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

sostituisco le coordinate di P_2 in quelle del punto

r_2: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ $\quad t = \frac{x - x_0}{a} \quad t = \frac{y - y_0}{b}$

$\Rightarrow t = \frac{x-4}{5} \quad t = \frac{y+2}{-1} \Rightarrow \frac{x-4}{5} = -y+2$

$ax + by = c$

$5 \cdot \left(\frac{x-4}{5}\right) = (-y-2) \cdot 5 \Rightarrow \quad x - 4 = -5y - 10 \Rightarrow x + 5y = +4 - 10$

$\Rightarrow x + 5y = -6 = S_2$

(3) S_3 passante per $P_3(\boxed{3}, -2)$ e $\boxed{\text{parallela a } y}$

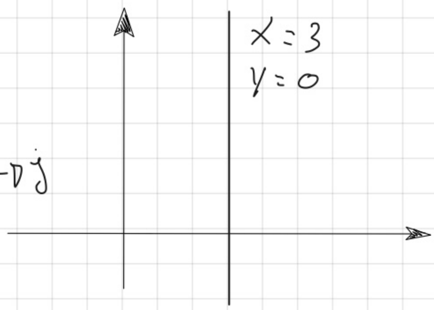
CASO 3: retta passante per P e parallela a un asse

l'asse y ha eq. CART $x = 0$

una retta parallela a questa deve avere equazione del tipo $x = K$.

impongo il passaggio per $P_3(3,-2)$

S_3: $x = \boxed{3}$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to j$



$(-3, 0)$ → parallela asse y

(vedi ex prima

Punto in comune tra due rette

$$s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad t : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

STEP:

1. Elimino x^*, y^*, z^*
2. ho 3 equazioni in t_1 e t_2

3. Le prime due equazioni sono verificate se $t_1 = \frac{5}{7}$ e $t_2 = \frac{-1}{7}$,
4. Sostituisco questi valori nella terza equazione che non è soddisfatta e quindi le due rette **NON** hanno alcun punto in comune.

Punto in comune tra due rette

1. eguaglio le $x = x_o + at, y.., z$ delle due equazioni
2. trovo due risultati che sostituisco nella terza equazione, se non è soddisfatta le due rette NON hanno alcun punto in comune

---

Un punto appartiene a una retta data?

$P(-1, 9, -2)$

$$r : xi + yj + zk = (2+t)i + (3-2t)j + (4+t)k$$

Deve esistere un particolare valore del parametro tale per cui le tre relazioni devono essere simultaneamente verificate. Deve esistere un unico t che verifichi le tre equazioni.

$$\begin{cases} -1 = 2 + t \\ 9 = 3 - 2t \\ -2 = 4 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -6 \end{cases}$$

Poiché le tre equazioni non sono verificate simultaneamente, P non appartiene a r

Un punto appartiene a una retta data?

$P(-1, 9, -2)$

$$r : xi + yj + zk = (2+t)i + (3-2t)j + (4+t)k$$

Deve esistere un particolare valore del parametro tale per cui le tre relazioni devono essere simultaneamente verificate. Deve esistere un unico t che verifichi le tre equazioni.

$$\begin{cases} -1 = 2 + t \\ 9 = 3 - 2t \\ -2 = 4 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -6 \end{cases}$$

Poiché le tre equazioni non sono verificate simultaneamente, P non appartiene a r

$P \in r?$

$P_P \in r?$ $\quad P_P(x_P, y_P, z_P) \quad r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\begin{cases} x_P = x \\ y_P = y \\ z_P = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \\ t = \\ t = \end{cases}$$

se sono tutte verificate, $P \in$ alla retta

Piano e retta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \beta : ax + by + cz = d$$

- retta contenuta nel piano β: si prendono le coordinate del punto (x_0, y_0, z_0) e si inseriscono nell'equazione del piano: $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$
  - Oppure $\rightarrow n \cdot v = 0, P_0(x_0, y_0, z_0) \in \beta$
- retta parallela al piano: se n (versore del piano) e v (versore della retta), $n \cdot v = 0$, e $P(x_0, y_0, z_0) \notin \beta$
- retta incidente al piano: $n \cdot v \neq 0$
- retta perpendicolare al piano $\perp \beta$: $v = \lambda n$ (i due vettori devono essere paralleli)
- determinare il punto di intersezione tra retta e piano:

  Metto a sistema l'equazione cartesiana della retta, con l'equazione del piano.

  Trovo la t e la sostituisco per trovare (x, y, z)

DETERMINO IL PUNTO DI INTERSEZIONE H TRA LA RETTA E IL PIANO

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2t + 6 \\ z = 4t \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2t - (-2t + 6) + 2 \cdot 4t &= 0 \\ 12t &= 6 \\ t &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \longrightarrow H = (1, 5, 2)$$

PUNTO DI INTERSEZIONE H RETTA - PIANO

① $\begin{cases} \text{eq. cartesiana retta} \\ \text{eq. piano} \end{cases}$ ② trovo t e la sostituisco qui per trovare (x,y,z)

Rette e fasci di piani

Scrivere la retta in forma **cartesiana** e utilizzare la formula del fascio di piani.

Esempio

$$s: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x - 2 = 3 - y = \frac{z-1}{2}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y + z = 7 \end{cases}$$

$$Fascio: \lambda(x + y - 5) + u(2y + z - 7)$$

$$Fascio: \lambda(eq.1) + u(eq.2)$$

Piano passante per una retta e un punto

Scrivere l'equazione del piano β contenente il punto $P(6, 1, 1)$ e la retta

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Preso il vettore direzione v_r della retta e un punto Q appartenente ad essa, il piano β sarà $\perp$ ai vettori v_r e $\overrightarrow{QP}$ e passerà per P.

Ponendo $z = t$ nelle equazioni cartesiane della retta si ricava:

$x = 2 - 2t$ e $y = x - z - 3 = -1 - 3t$

$$s: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pertanto $v_r = 2i + 3j - k$ e $Q(2, -1, 0)$

$\overrightarrow{QP} = (4, 2, 1) = 4i + 2j + k$

Il vettore $v_\beta \perp \beta$ è perpendicolare anche a v_r e $\overrightarrow{QP}$

$$v_\beta = v_r \wedge \overrightarrow{QP} = 5i - 6j - 8k$$

$$d = 5 * 2 - 6 * (-1) - 8 * 0 = 16$$

$$\beta : 5x - 6y - 8z = 16$$

OPPURE

Il piano β appartiene senz'altro al fascio F avente la retta come supporto:

$$Fascio : \lambda(x + 2z - 2) + u(x - y - z - 3) = 0$$

e sarà l'unico piano di F a passare per il punto P, inserendo le coordinate di P nell'equazione di F ricaviamo l'uguaglianza:

$$\lambda(6 + 2 * 1 - 2) + u(6 - 1 - 1 - 3) = 0$$

$u = -6\lambda$, poniamo $\lambda = 1, u = -6$

$$\beta : (x + 2z - 2) + -6(x - y - z - 3) = 0 \rightarrow \quad \beta : 5x - 6y - 8z = 16$$

Distanze nello spazio

Distanza punto - punto

$$dist(P_0, P_1) = ||\overrightarrow{P_0P_1}|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Distanza punto - piano

É la distanza tra il punto e la **proiezione ortogonale del punto sul piano**

$P^*(x^*, y^*, z^*)$, β che passa per $P_0(x_0, y_0, z_0) \perp v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$d = ax_0 + by_0 + cz_0$

$$dist(\beta, P^*) = \frac{|ax^* + by^* + cz^* - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

▼ **Dimostrazione**

$$dist = ||\frac{\overrightarrow{P_0P^*}v}{v \cdot v}v|| = \frac{|\overrightarrow{P_0P^*}v|}{||v^{\cancel{2}}||}\cancel{v} = \frac{|a(x^* - x_0) + b(y^* - y_0) + c(z^* - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax^* + by^* + cz^* - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dimostrazione della formula per la distanza punto-piano

Vediamo come ricavare la formula della distanza di un punto da un piano. Siano

$$P(x_P, y_P, z_P)$$

le coordinate di un punto dello spazio e

$$\alpha: \ \ ax + by + cz + d = 0$$

l'equazione cartesiana di un piano. Dobbiamo dimostrare che

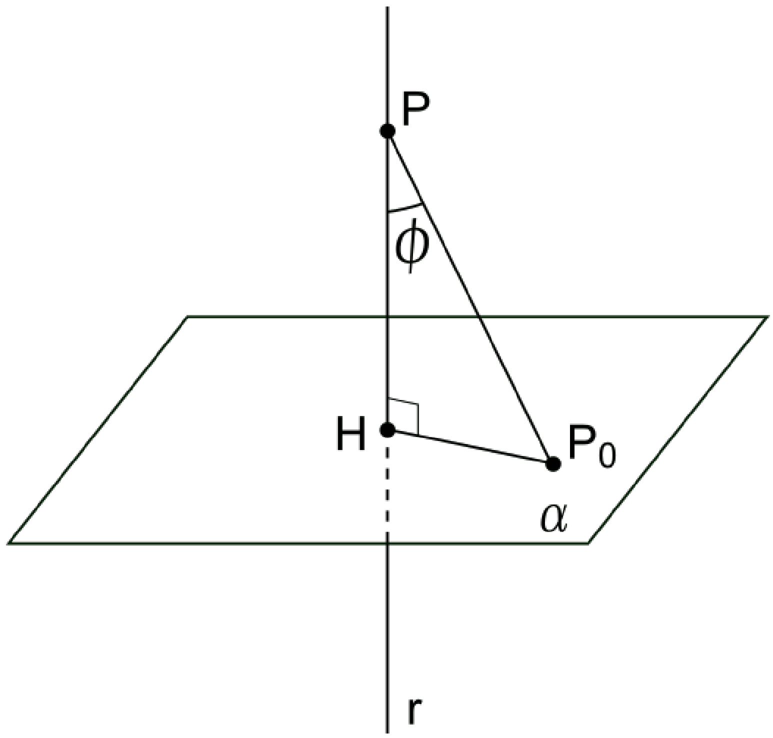
$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Siano H la proiezione ortogonale di P su α e r la retta passante per i punti P, H, nonché la retta passante per P e ortogonale ad α.

Indicando con $\mathbf{v}_r$ un qualsiasi vettore direttore della retta r e con $\mathbf{n}_\alpha$ il vettore dei coefficienti direttori del piano, abbiamo che

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{n}_\alpha = (a, b, c)$$

Detto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto del piano α distinto da H, costruiamo il triangolo di vertici P, P_0, H.



Dimostrazione della formula per la distanza punto-piano.

Ogni retta del piano α è ortogonale alla retta r, dunque la retta passante per i punti P_0 e H è perpendicolare alla retta r.

Da qui segue che il triangolo di vertici P, P_0, H è un triangolo rettangolo di ipotenusa $\overline{PP_0}$.

La distanza di P da α è, per definizione, la distanza tra i punti P e H, ossia

$d(P, \alpha) = d(P, H) = \overline{PH}$

Sappiamo dai teoremi trigonometrici sul triangolo rettangolo che ciascun cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente ad esso, quindi nel nostro caso

$$\overline{PH} = \overline{PP_0}\cos(\phi)$$

e dunque

$$d(P, \alpha) = \overline{PH} = \overline{PP_0}\cos(\phi)$$

Poniamo

$$\mathbf{u} := \overrightarrow{PP_0}$$

per cui la lunghezza del segmento $\overline{PP_0}$ coincide con la norma del vettore $\mathbf{u}$

$$\overline{PP_0} = ||\mathbf{u}||$$

e l'angolo ϕ è l'angolo acuto formato dai vettori $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{u}$.

Indicando con $\cdot$ il prodotto scalare canonico, sappiamo che vale la relazione la seguente relazione per l'angolo acuto tra vettori

$$\cos(\phi) = \frac{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}_r||\ ||\mathbf{u}||}$$

Nelle nostre ipotesi $\mathbf{v}_r$ è un qualsiasi vettore direttore della retta r, cosicché sappiamo quale direzione individua ma non aprioristicamente quale sia il suo verso. Alla luce di tale generalità i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}_r$ possono formare un angolo acuto o un angolo ottuso: il valore assoluto al numeratore garantisce che ϕ sia un angolo acuto. In caso di dubbi vi invitiamo a dare un'occhiata alla pagina dedicata all'orientazione di una retta.

Tornando a noi, sostituiamo l'espressione di $\cos(\phi)$ in termini dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}_r$

$$d(P,\alpha) = \overline{PP_0}\cos(\phi) =$$

$$= ||\mathbf{u}||\ \frac{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}_r||\ ||\mathbf{u}||} = \frac{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}_r||}$$

Le componenti del vettore $\mathbf{u}$ sono date dalla differenza delle coordinate dei punti che lo definiscono

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x_P,\ y_0 - y_P,\ z_0 - z_P)$$

D'altro canto le componenti del vettore $\mathbf{v}_r$ sono

$$\mathbf{v}_r = (a, b, c)$$

dunque

$$|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}| = |(a,b,c) \cdot (x_0 - x_P,\ y_0 - y_P,\ z_0 - z_P)| =$$

$$= |a(x_0 - x_P) + b(y_0 - y_P) + c(z_0 - z_P)| =$$

$$= |ax_0 - ax_P + by_0 - by_P + cz_0 - cz_P| =$$

$$= |ax_P + by_P + cz_P - ax_0 - by_0 - cz_0| =$$

$$= |ax_P + by_P + cz_P + d|$$

L'ultima uguaglianza deriva dall'appartenenza del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al piano α, infatti

$$P_0 \in \alpha \iff ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \iff$$

$$\iff d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Infine

$$||\mathbf{v}_r|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

e quindi

$$d(P,\alpha) = \frac{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}_r||} = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

da cui la tesi.

Distanza piano - retta

$$\beta : P_0(x_0, y_0, z_0) \perp v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad r : P_1(x_1, y_1, z_1) \quad v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

- retta $\in \beta$ → *distanza* = 0
- retta e β sono incidenti → *distanza* = 0
- retta $||\ \beta$ → $dist(P_1, \beta)$ distanza punto - piano

Distanza tra due piani

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z \quad \beta : a_2x + b_2y + c_2z$$

- coincidenti → *distanza* = 0
- incidenti → *distanza* = 0
- paralleli → $dist(P_1, \beta)$ distanza punto - piano

TROVO UN PUNTO APPARTENENTE AL PIANO DI EQUAZIONE $2x-4y-2z-4=0$:
SCELGO $x=0, y=0$ → $2\cdot 0-4\cdot 0-2z-4=0$ → $z=-2$ → $(0,0,-2)$

Distanza punto - retta

1. Ricaviamo l'equazione del piano $\beta \perp retta$, passante per il punto $P(x_0, y_0, z_0)$.
2. Determiniamo dove la retta interseca il piano β, chiamando H questo punto
3. Calcolare la distanza tra il punto P e il punto H

Se il punto appartiene alla retta, la distanza punto-retta è **nulla**.

OPPURE:

(con $||v \wedge \overrightarrow{P_0 P^*}||$ si indica il modulo del prodotto vettore, quindi la $\sqrt{i^2 + j^2 + k^2}$ dati dal risultato dell'operazione.

$$dist(r, P^*) = \frac{||v \wedge \overrightarrow{P_0 P^*}||}{||v||} \rightarrow \frac{||v \wedge \overrightarrow{P_0 P^*}||}{\sqrt{i^2 + j^2 + k^2}}$$

$$dist(r, P^*) = \frac{||v \wedge \overrightarrow{P_0 P^*}||}{||v||} \rightarrow \frac{||v \wedge \overrightarrow{P_0 P^*}||}{\sqrt{i^2 + j^2 + k^2}}$$

Distanza tra due rette

$r_1 : P_1(x_1, y_1, z_1)$ diretta come v_1, $r_2 : P_2(x_2, y_2, z_2)$ diretta come v_2

- coincidenti, incidenti → *distanza* = 0
- parallele → $dist(P_1, r_2)$, distanza punto - retta
- sghembe :

$$dist(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (v_1 \wedge v_2)|}{||v_1 \wedge v_2||}$$

OPPURE:

se ho due rette sghembe r ed s, la loro distanza di un punto qualsiasi della retta r dal piano α passante per s e parallelo a r.

per avere $d(r, s)$:

- equazione cartesiana del piano α passante per la retta s e parallelo a r: $\alpha : ax + by + cz + d = 0$
- Fissiamo un punto $P(x, y, z)$ della retta r
- Calcoliamo la distanza del punto P dal piano α con la formula per la distanza punto-piano

$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- dove a,b,c sono i coefficienti delle incognite dell'eq. cartesiana del piano α
- $d(P, \alpha) = d(r, s)$

Piano contenente una retta e parallelo a un'altra retta

Piano contenente r e parallelo a s;

β ha come vettore perpendicolare il vettore $v_r \bullet v_s$ e impongo il passaggio per il punto trovo l'equazione.

▼ esempio

) scrivere l'equazione del piano contenente r e parallelo a s;

Soluzione: Il piano ha come vettore perpendicolare il vettore $\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$, imponendo il passaggio per il punto $(1, 0, -1) \in r$ si trova

$$2x + 5y - z = 3.$$

OPPURE:

Piano contenente\passante una retta e parallelo a un'altra retta

r è in forma cartesiana, scrivo l'equazione del fascio di pian che ha r come sostegno la retta r.

$F : \lambda(\ldots) + \mu(\ldots)$

Determiniamo le componenti del vettore dei coefficienti direttori dei piani del fascio n_F

Troviamo il vettore direzione della retta s v_s

Imponiamo che il prodotto scalare tra i vettorei $n_F \bullet v_s = 0$

sostituisco nell'equazione del fascio i valori trovati di λ e μ, trovando il piano di equazione α che è il piano contenente la retta r e parallelo alla retta s

▼ esempio

Esempio

Risolviamo l'esercizio proposto a titolo di esempio. Dobbiamo determinare l'equazione del piano contenente la retta

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

e parallelo alla retta

$$s: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Svolgimento: la retta r è già in forma cartesiana, dunque scriviamo direttamente l'equazione del fascio di piani che ha r come sostegno

$$\mathrm{F}: \ \lambda(x - y + z) + \mu(x + 2z - 1) = 0$$

$$\mathrm{F}: \ (\lambda + \mu)x - \lambda y + (\lambda + 2\mu)z - \mu = 0$$

Determiniamo le componenti del vettore dei coefficienti direttori dei piani del fascio

$$\mathbf{n}_{\mathrm{F}} = (\lambda + \mu, \ -\lambda, \ \lambda + 2\mu)$$

Dopodiché troviamo il vettore direzione della retta s

$$\mathbf{v}_s = (2, 2, -2)$$

e imponiamo che il prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{n}_{\mathrm{F}}$ e $\mathbf{v}_s$ sia nullo

$$\mathbf{n}_{\mathrm{F}} \cdot \mathbf{v}_s = 0$$

$$(\lambda + \mu, \ -\lambda, \ \lambda + 2\mu) \cdot (2, 2, -2) = 0$$

$$2\lambda + 2\mu - 2\lambda - 2\lambda - 4\mu = 0$$

$$-2\lambda - 2\mu = 0$$

$$\lambda + \mu = 0$$

Una delle soluzioni della precedente equazione è

$$(\lambda, \mu) = (1, -1)$$

dunque, nell'equazione del fascio

$$\mathrm{F}: \ (\lambda + \mu)x - \lambda y + (\lambda + 2\mu)z - \mu = 0$$

sostituiamo $\lambda = 1$ e $\mu = -1$, ottenendo il piano di equazione

$$\alpha: \ -y - z + 1 = 0$$

che è il piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.

▼ Dimostrazione

$$dist(r_1, r_2) = \left|\left| \frac{\overrightarrow{P_1P_2}(v_1 \wedge v_2)}{(v_1 \wedge v_2)\cancel{(v_1 \wedge v_2)}} \cancel{(v_1 \wedge v_2)} \right|\right| \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (v_1 \wedge v_2)|}{||v_1 \wedge v_2||}$$

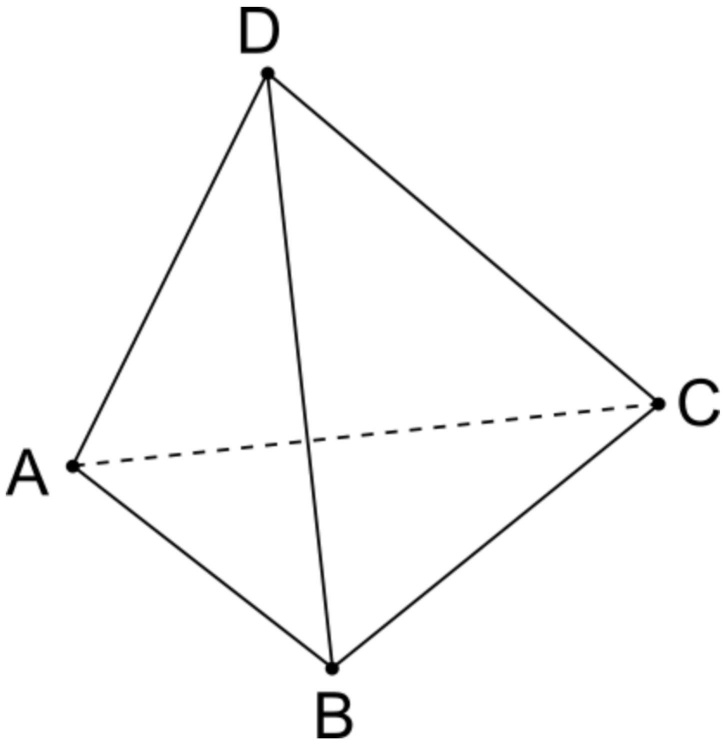
Volumi e aree

Tetraedro

Se il volume del tetraedro è nullo, i punti sono complanari.

Dati 4 punti distinti dello spazio tridimensionale, che indichiamo con A, B, C, D, il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D è pari a 1/6 del valore assoluto del prodotto misto fra tre vettori aventi per estremi i punti A, B, C, D e che non appartengono allo stesso piano.

Per fissare le idee disegniamo un tetraedro e chiamiamo i suoi vertici A, B, C, D.



Il tetraedro ha 6 spigoli, che possiamo identificare con i vettori

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BD}$$

Per calcolare il volume del tetraedro basta scegliere tre vettori che non appartengono allo stesso piano, cioè che non sono i lati di uno stesso triangolo, come ad esempio $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, calcolare il valore assoluto del loro prodotto misto e dividerlo per 6.

▼ Esempio

$$A(1,0,1) \quad B(3,1,2) \quad C(4,-1,3) \quad D(2,-3,1)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (3-1, 1-0, 2-1) = (2,1,1)\\ \overrightarrow{AC} &= (4-1, -1-0, 3-1) = (3,-1,2)\\ \overrightarrow{AD} &= (2-1, -3-0, 1-1) = (1,-3,0)\end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \, . \, \overrightarrow{AD}\right| = \left| det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right| = 6$$

$$Volume = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right|}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

▼ Dimostrazione

Sebbene l'esercizio è concluso, è bene capire perché il volume di un tetraedro generato da tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ si calcola in questo modo.

In generale, il volume di un tetraedro generato da tre vettori è uguale a 1/6 del volume del parallelepipedo generato dagli stessi vettori.

Dall'interpretazione geometrica del prodotto misto, è noto che il valore assoluto del prodotto misto di tre vettori uguaglia il volume del parallelepipedo costruito a partire da essi, dunque il volume del tetraedro generato da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ è pari a 1/6 del valore assoluto del prodotto misto tra $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Tutto qui!

Triangolo

Se l'area del triangolo è nulla, i tre punti sono allineati.

Dalla Trigonometria è noto che l'area di un triangolo qualsiasi è data dal prodotto della lunghezza di due lati consecutivi per il seno dell'angolo tra essi compreso, il tutto fratto due.

Per intenderci, se $\overline{AB}, \overline{AC}$ indicano le misure di due lati consecutivi di un triangolo, e se θ è l'ampiezza dell'angolo tra essi compreso, allora

$$\text{Area Triangolo ABC} = \frac{\overline{AB}\ \overline{AC}\ \sin(\theta)}{2}$$

Ora, se $A \text{ e } B$ sono gli estremi di un vettore $\overrightarrow{AB}$, allora la norma del vettore $\overrightarrow{AB}$ coincide con la lunghezza del lato AB

$$\overline{AB} = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

e lo stesso dicasi per AC, ossia

$$\overline{AC} = \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|$$

Ovviamente, l'angolo θ compreso tra i lati AB, AC coincide con l'angolo tra i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, dunque

$$\text{Area Triangolo ABC} = \frac{\overline{AB}\ \overline{AC}\ \sin(\theta)}{2} =$$

$$= \frac{\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|\ \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| \sin(\theta)}{2}$$

A questo punto, ricordiamo che il modulo del prodotto vettoriale tra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ è pari al prodotto delle norme dei vettori moltiplicato per il seno dell'angolo tra essi compreso

$$\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|\ \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|\ \sin(\theta)$$

per cui

$$\text{Area Triangolo ABC} = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|\ \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| \sin(\theta)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right|$$

cioè l'area di un triangolo avente come lati due vettori è uguale alla metà del prodotto vettoriale tra i due vettori.

▼ Esempio:

$$\overrightarrow{AB} = -i + 3j - 4k = (-1, 3, -4)$$
$$\overrightarrow{AC} = i + 3j - 2k = (1, 3, -2)$$

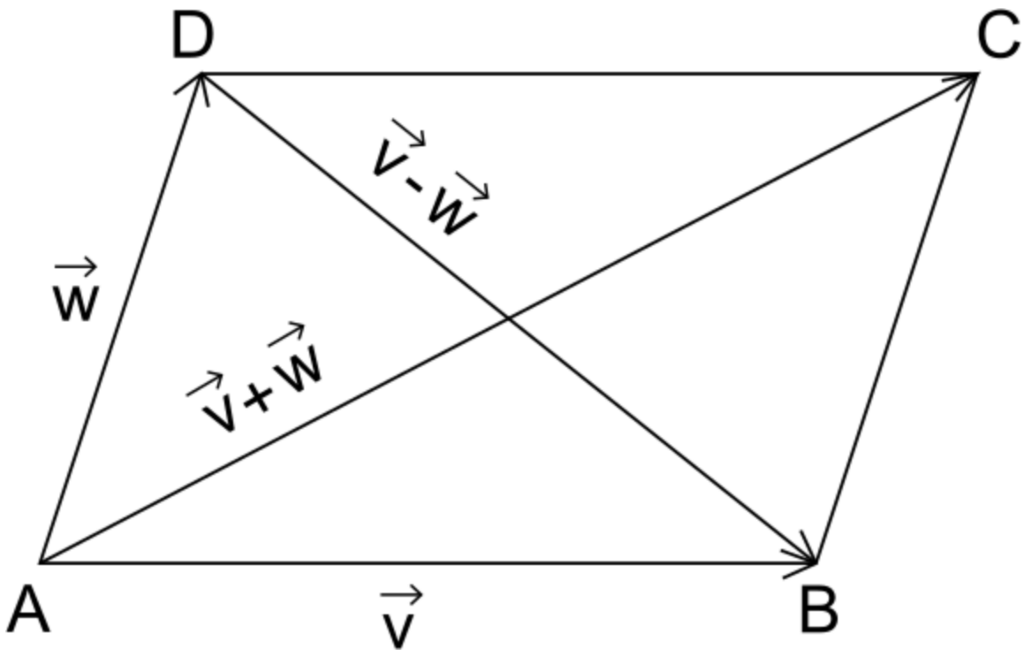
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 6i - 6j - 6k = (6, -6, -6)$$

$$\left|\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|\right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 36 + 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

$$Area = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|\right|}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Parallelogramma

L'idea per risolvere l'esercizio consiste nel ricordare la regola del parallelogramma, secondo cui dati due vettori $\vec{v}, \vec{w}$ corrispondenti a due lati consecutivi di un parallelogramma AB, AD, la somma $\vec{v} + \vec{w}$ rappresenta la diagonale AC, mentre la differenza $\vec{v} - \vec{w}$ è la diagonale DB.



v_1 e v_2 sono lati **NON** paralleli

$$Area = ||v_1 \wedge v_2||$$

▼ Esempio:

$$v_1 = 2i - 3j + 5k \qquad v_2 = 4i + 5j - 12k$$

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & -12 \end{pmatrix} = 11i + 44j + 22k$$

$$Area = ||v_1 \wedge v_2|| = \sqrt{11^2 + 44^2 + 22^2} = 11\sqrt{21}$$

Parallelepipedo

$$Volume = |u \cdot v \wedge w|$$

Se nessuno dei tre vettori è nullo, il prodotto misto è uguale a zero se e solo se i tre vettori sono complanari.

▼ Esempio:

$$u = 5i - 2j + k \qquad v = 3i + 2j - 4k \qquad w = -i - 2j + 2k$$

$$Volume = |u \cdot v \wedge w| = |-20| = 20$$