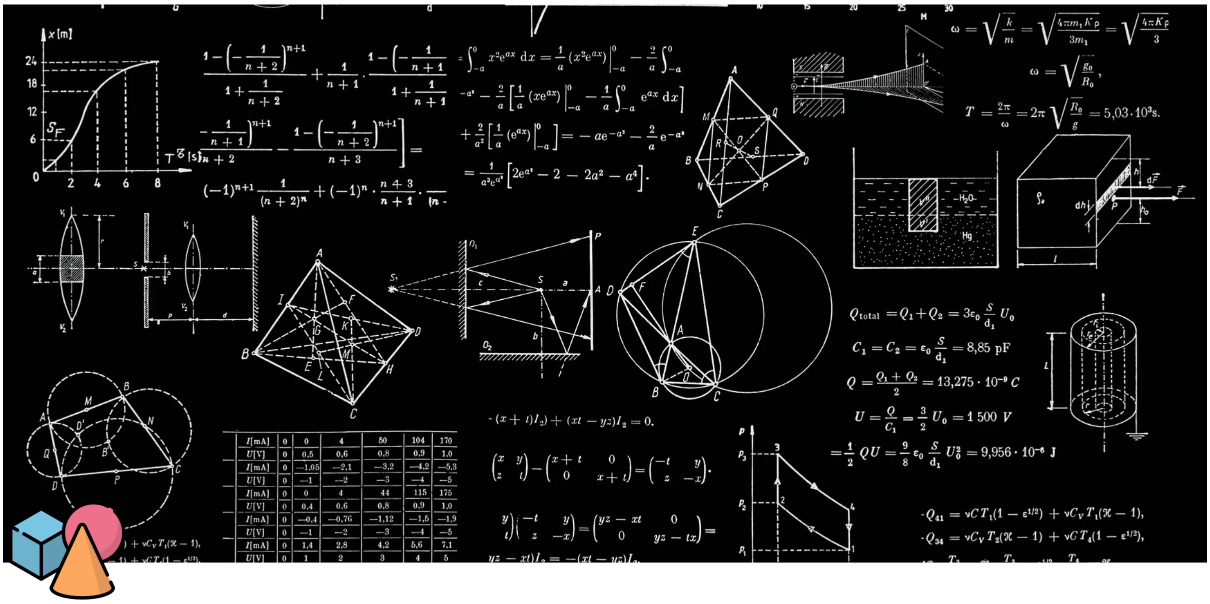


Formulario Curve

Esercizio 1

Curva chiusa:

Vettore tangente

Curva regolare:

- Modulo

Equazione della retta tangente alla curva nel punto p ottenuto per t=0

Calcolare la lunghezza della curva di equazione parametrica:

- Curva semplice:
- Forma polare

Integrali curvilinei di prima specie

- Caso 3: sostituisco entrambi
- Applicazione integrali curvilinei
- Baricentro e massa di una curva

Terna intrinseca

- versore, formule in **teoria**:
- formule in **pratica**:
- Curvatura k(t)
- Raggio di curvatura $\rho(t)$
- Raggio di curvatura nel punto, l'equazione piano osculatore
- Piano osculatore π_o
  - Piano osculatore
  - Piano normale

Piano rettificante
Stabilire per quali valori di a la curva è planare
Una **curva è piana o planare:**
Cerchio osculatore
Centro del cerchio osculatore

Esercizio 1

1. Sia γ la curva di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

con $-\pi \leq t \leq \pi$. Stabilire se γ è chiusa; calcolare il vettore tangente e il suo modulo; stabilire se γ è regolare.

Curva chiusa:

Il punto "d'arrivo" corrisponde con quello "d'inizio":

ovvero vado a sostituire nell'equazione parametrica della curva i valori degli estremi in cui essa è definita. Se sono risultati differenti quindi la γ **non** è chiusa.

Vettore tangente

Vettore tangente= vettore della derivata della curva:

Derivo la curva (x' e y'), il risultato.

Curva regolare:

$$||\vec{r}\,'(t)|| \neq 0 \rightarrow t = 0 \, , t \in I$$

Il modulo del vettore tangente ≠ 0
Oppure **regolare a tratti**: due curve regolari

Modulo

$$||\vec{r}(t)|| = \sqrt{t^2 cos^2 t + t^2 sin^2 t} = |t|$$

Equazione della retta tangente alla curva nel punto p ottenuto per t=0

1) per t=0 trovo P_x (..,..,..)

2) $r'(t)$

3)r'(0) $\rightarrow$ (a, b, c)

$$s: \begin{cases} x = P_x + at \\ \dots\ \dots \end{cases}$$

Calcolare la lunghezza della curva di equazione parametrica:

1. $\vec{r}\,'(t)$
2. $||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{X^2 + Y^2}$
3. Formula

Lunghezza della curva:

$L(\gamma) = \int_a^b ||r'(t)||dt$

Se è regolare a tratti e non il 0, scrivo due integrali (C'è un **| |** separo gli integrali)

Curva semplice:

non si *intreccia*, non ci sono valori di t per cui riottengo lo stesso numero; è semplice se almeno una componente è **iniettiva**.

se per ogni coppia di valori $t_1 \neq t_2$ nell'intervallo risulta $f(t_1) \neq f(t_2)$.

Forma polare

$\rho = f(x)$ $\Rightarrow \vec{r}(x) = (f(x)cosx;\ f(x)sinx)$

ex. $\rho = e^{-x} \Rightarrow\ (e^{-x}cosx, e^{-x}sinx)$

Integrali curvilinei di prima specie

$$\begin{aligned}\int_C f\,ds &= \int_a^b f(C(t))\,|C'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt\end{aligned}$$

Dunque, l'integrale curvilineo di prima specie $\int_C f(x,y,z)\,ds$ si ottiene formalmente:
1) sostituendo al posto di x,y,z rispettivamente $x(t),y(t),z(t)$;
2) sostituendo al posto dell'elemento di lunghezza ds della curva C l'espressione

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

3) integrando su $[a,b]$.

Esempio 1.2 *Sia C l'arco di curva (elica cilindrica) di equazioni parametriche*

$$C(t)=\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

Calcolare $\int_C z\,ds$.

Soluzione. Qui $f(x,y,z)=z$ e

$$ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1^2}\,dt=\sqrt{2}\,dt$$

Dunque

$$\int_C z\,ds=\int_0^{2\pi} t\,\sqrt{2}\,dt=2\sqrt{2}\,\pi^2$$

!! $\int_\gamma f(x,y)ds=\int_a^b f(\vec{r}(t))\bullet \underbrace{||r'(t)||dt}_{ds}$

calcolata nella curva x → x della curva

Integrale definito tra gli estremi dell'intervallo, sostituisco x e\o y e moltiplico per il modulo della derivata

ex.

$\int_\gamma x ds$ con $\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $t \in [0, a]$

$f(x, y) = x$ $\vec{r}(t) = (t, t^2)$. $r'(t) = (1, 2t)$. $||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2}$

$\int_\gamma x ds = \int_0^a t\sqrt{1 + 4t^2} dt$

Nota: attenzione a dove mi trovo nell'intervallo: ex. $[o, \pi]$ solo positivo ecc

Caso 3: sostituisco entrambi

modulo della derivata

③ $\int_\gamma \frac{x}{1+y^2} ds$ con $\underline{r}(t) = (-\sin t; \cos t)$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\|\underline{r}'(t)\| = 1$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin t}{1+\cos^2 t} \cdot 1 dt = [\arctan \cos t]_0^{\pi/2} = \underset{\cos \pi/2}{0} - \underset{\cos 0}{\arctan 1} = -\frac{\pi}{4}$

deriv di

Applicazione integrali curvilinei

Baricentro e massa di una curva

Baricentro della linea: $x_G = \dfrac{\int_\gamma x\lambda(x, y, z)ds}{\boxed{\int_\gamma \lambda(x, y, z)ds}} \rightarrow \text{MASSA}$

Massa $\boxed{\int_\gamma \lambda(x, y, z)ds}$ ovvero

$\int densità = massa$

$$y_G = \frac{\int_\gamma y\lambda(x, y, z)ds}{\boxed{\int_\gamma \lambda(x, y, z)ds}}$$

λ costante:

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\lambda ds}{\int_\gamma \lambda ds} = \frac{\cancel{\lambda} \int_\gamma x ds}{\cancel{\lambda} \boxed{\int_\gamma ds} \rightarrow = L(\gamma)} =$$

in cui $\int_\gamma \mathbf{ds} = \mathbf{L}(\gamma)$

lunghezza della curva

$$\frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x ds$$

$$y_g \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma y ds \ ; \ \ z_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma z ds$$

Step:

1. calcolo $r'(\theta)$
2. calcolo $||r'(\theta)|| = R$
3. con densità lineare $\lambda(\theta) = e^\theta$
   e $\theta \in [0, \pi]$
4. *MASSA*= $\int_\gamma \lambda ds = \int_0^\pi e^\theta R d\theta = R[e^\theta]_0^\pi = R(e^\theta - 1)$

es 8. Calc. MASSA e BARICENTRO della curva

$r(\theta) = (R\cos\theta ; R\sin\theta) \quad \theta \in [0 ; \pi] \quad R>0$

con densità lineare $\lambda(\theta) = e^\theta$ non costante

$r(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta) \qquad r'(\theta) = (-R\sin\theta, R\cos\theta)$

$||r'(\theta)|| = R$

MASSA $\int_\gamma \lambda ds = \int_0^\pi e^\theta R d\theta = R[e^\theta]_0^\pi = R(e^\pi - 1)$ MASSA

modulo ecc...

5. Baricentro

BAR. $Y_\sigma = \frac{1}{M}\int_\sigma x\lambda\, d\sigma = \frac{1}{M}\int_0^\pi R\cos\theta \cdot e^\theta R\, d\theta = \frac{R^2}{M}\int_0^\pi e^\theta\cos\theta\, d\theta =$

$= \frac{R^2}{M}\left[e^\theta(\cos\theta + \sin\theta)\right]_0^\pi$

NOTA: $\int e^\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{e^\theta}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$ ESERC. PER PARTI

$= \frac{R^2}{2M}(e^\pi(-1)-1) = \frac{R^2}{2M}(-e^\pi-1) =$

$= \frac{R^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{R(e^\pi-1)}(-e^\pi-1) = \frac{R}{2}\,\frac{e^\pi+1}{1-e^\pi}$

Terna intrinseca

(vettore tangente= solo derivata
versore tangente= $\frac{\text{derivata}}{\text{modulo}}$)

versore, formule in teoria:

tangente

$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{||\vec{r}'(t)||}$$

normale

$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{||\vec{T}(t)||}$$

binormale

$$\vec{B}(t) = T(t) \wedge N(t)$$

formule in pratica:

versore :

tangente

$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{||\vec{r}'(t)||}$$

binormale

$$\vec{B}(t) = \frac{r'(t) \wedge r''(t)}{||\vec{r}'(t) \wedge r''(t)||}$$

normale

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t)$$

Curvatura k(t)

$$k(t) = \frac{||r'(t) \wedge r''(t)||}{||r'(t)||^3}$$

Raggio di curvatura $\rho(t)$

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

Raggio di curvatura nel punto, l'equazione piano osculatore

Step

1. r$(1) = (4,3,1)$

   Sostituisco il valore nell'equazione della retta P(4,3, 1)
2. $r'(t) = (3 + 3t^2)$
3. $r''(t)$
4. prodotto vettoriale $r'(1) \wedge r''(1)$
5. $||r' \wedge r''||$
6. $||r'||$
7. calcolo $k(1)$ e $\rho(1)$

Piano osculatore π_o

> ‼️ Piano ortogonale a $B(1)$ [vettore binormale] passante per il punto P
>
> $\pi_o \perp \vec{B}$ passante per P
>
> **Ma per scrivere l'equazione di un piano va già bene un vettore**

$P(A;B;C)$ $\qquad$ $r'(1) \wedge r''(1) = (i,j,k)$

$$\pi_o = i(x-a) + j(y-b) + k(z-c) = 0$$

Piano osculatore

ortogonale a $\vec{B}$

Piano normale

ortogonale a $\vec{T}$ (e contiene $\vec{N}$)

Piano rettificante

ortogonale a $\vec{N}$

Stabilire per quali valori di a la curva è planare

ovvero: per quali valori di A è nello spazio ma sta tutta su un piano?

Una curva è piana o planare:

- appartiene a un piano,

-il vettore B è costante,

-la curva è contenuta nel piano osculatore.

Una curva è piana se B è costante

1. $r'(t)$
2. $r''(t)$
3. $r' \wedge r''$= in questo caso$(6at+2, -6at^2+4, -2)$. Quando non dipende da t? $\Rightarrow$ se $a=0$
4. se $a=0,\ r' \wedge r'' = (2,4,-2)$ con a=0
5. la curva è contenuta nel piano osculatore→ scelgo un punto P
6. → P(0, 1, 1) con t=0 (lo sostituisco alle t dell'equazione DELLA TRACCIA) … $x+2y-z=1$

Cerchio osculatore

es 11 sia data la parabola $y=x^2$
scrivere una sua parametrizzazione da $O(0,0)$ ad $A(2;4)$.

1) Determinare $\vec{T}$ ed $\vec{N}$ in $(1,1)$

2) Scrivere l'equazione del cerchio osculatore in $(1,1)$

Sol. Trasformo $y = x^2$ in un equazione in r → $r(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0, 2]$

versore tangente $\vec{T}(1) = ?$

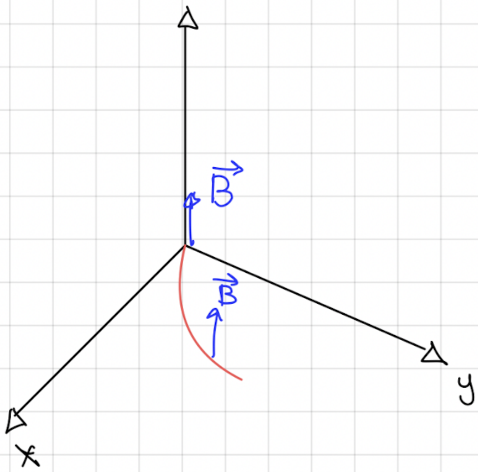
$r(t) = (t; t^2)$

$r'(t) = (1, 2t)$ $\quad \|r'(t)\| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} \Rightarrow \sqrt{1 + 4t^2}$

vers. Tg in 1 $\quad \vec{T}(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \quad \vec{T}(1) =$

$\vec{T}(1) = \dfrac{1, 2}{\sqrt{5}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} ; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ *

mi faccio "furba"



$\vec{T}(1) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \vec{B}(1) = (0, 0, 1) \quad \vec{N}(1) = \vec{B}(1) \wedge \vec{T}(1)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

perché fare questo ↓ sarebbe stato un casino

Così è un CASINO

$$\vec{N}(1) = \frac{T'(1)}{\|T'(1)\|} \quad \text{con } \vec{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} ; \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \right)$$

Centro del cerchio osculatore

$\mathcal{C} = P + \rho \bullet \vec{N}$

centro= P + raggio di curvatura • vettore normale

$r(t) = (t, t^2, 0) \quad \rightarrow \quad r(1) = (1, 1, 0)$

$r'(t) = (1, 2t, 0) \qquad r'(1) = (1, 2, 0)$

$r''(t) = (0, 2, 0) \qquad r''(1) = (0, 2, 0)$

$r'(t) \wedge r''(t) = (0, 0, 2)$

$\|r'\| = \sqrt{5}$

$\|r' \wedge r''\| = 2$

$k(1) = \frac{2}{(\sqrt{5})^3} = \frac{2}{5\sqrt{5}} \rightarrow \rho = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

!! $C = (A, B, C)$
eq. cerchio osculatore: $(x - A)^2 + (Y - B)^2$

$C = (1, 1, 0) + \frac{5\cancel{\sqrt{5}}}{2} \circ \left(-\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} ; \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} ; 0 \right) = \left(-4, \frac{7}{2} ; 0 \right)$

Nel piano $(x; y) \Rightarrow C\left(-4 ; \frac{7}{2}\right)$

$c.osc = (x - (-4))^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$