Formulario Equazioni differenziali

Sono equazioni in cui l'incognita è una funzione $y = y(x)$ e nell'equazione differenziale è presente un legame tra **incognita** y, variabile **indipendente** x e **derivate**.

L'**ordine** delle equazioni differenziali è dato dal **numero massimo di derivazione che compare**. Per esempio un'equazione differenziale è di primo ordine se il massimo ordine di derivazione che compare è la derivata prima.

Esempio:

La ricerca delle primitive di una funzione f equivale a risolvere un'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x)$$

$y'(x) = \frac{1}{x}$ → equazione differenziale di 1° ordine → perchè l'ordine massimo di derivazione che compare è la derivata prima.

- **Integrale generale** (famiglia di tutte le soluzioni) in $(0; +\infty) = \ln x + c$
- **Integrale generale** in $(-\infty; 0) = \ln(-x) + c$

📌 Si risolvono per intervalli: non si risolve in $x \neq 0$, ma si risolve in $(-\infty; 0)$ e $(0; +\infty)$

> Solitamente si utilizzano per studiare dei fenomeni in un intervallo di tempo per esempio

---

Problema di Cauchy per un equazione differenziale di ordine n

📌 La ricerca della soluzione dell'equazione differenziale $y(x)$ in un intervallo I che soddisfi le condizioni iniziali.

- Il **numero di condizioni iniziali** sono **pari all'ordine dell'equazione differenziale: n**
- Soluzione $y(x)$:
  - Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad \begin{array}{c} x_0 \in I \\ \rightarrow y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R} \\ y(x) \in \mathcal{C}^n(I) \end{array}$$

  $y(x) \in \mathcal{C}^n(I)$ → derivabile n volte con derivata continua in I esiste una sola soluzione.

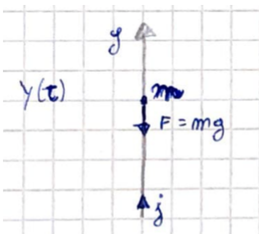
- L'insieme di $(x_0, y(x_0))$ è un punto

Teorema di Cauchy per equazioni differenziali di ordine n

📌 Se un'equazione è di classe $\mathcal{C}^n$, cioè è derivabile n volte con derivata continua, allora la soluzione al problema di Cauchy esiste ed è unica.

Modelli:

▼ **1. Caduta libera di un grave lungo una guida rettilinea**



$$m\overline{a} = m\overline{g}$$
$$my''(t)\underline{j} = -m\overline{g}\underline{j}$$

$\Rightarrow y''(t) = -\overline{g}$ equazioni differenziale nella funzione incognita $y(t)$ → legge oraria del grave.

É un'equazione differenziale di **secondo ordine** → perchè l'ordine massimo di derivazione che compare è la derivata seconda.

$$y'' = -g \overbrace{\longrightarrow}^{\int} y' = -gt + c \overbrace{\longrightarrow}^{\int} y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$$

Evidenziata è l'integrale generale, composto da infinite equazioni → il moto non è determinato univocamente, per determinarlo univocamente dobbiamo **imporre delle condizioni**, per esempio *posizione e velocità all'istante* $t = 0$

$$y(0) = y_0 \qquad y'(0) = y_1$$
$$\begin{cases} y'' = -g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_1 t + y_0$$

2. Dinamica delle popolazioni

$P(t)$ è il numero di individui di una popolazione all'istante t.

$P'(t) =$ velocità di crescita $\Rightarrow P'(t) = kP(t)$ **equazione differenziale nella funzione incognita $P(t)$ di ordine 1.**

$$\frac{P}{P'} = k \rightarrow (\log P(t))' = (kt)' \Rightarrow \log P(t) = kt + c \Rightarrow P(t) = e^{kt+c}$$
$$\Rightarrow P(t) = e^c e^{kt} \Rightarrow P(t) = \overbrace{h}^{e^c \text{ cost}} e^{kt}$$

L'**integrale generale dell'equazione generale** è la famiglia di funzioni:

$$P(t) = he^{kt} \qquad h > 0$$

Per avere una sola soluzione → **Problema di Cauchy** $P(0) = P_0$ → primo ordine, 1 condizione

Soluzione: $P(t) = P_0 e^{kt}$ → è una soluzione irrealistica, esauriremmo le risorse del pianeta.

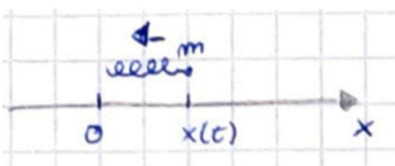
2.1 Dinamica delle popolazioni che tiene conto delle capacità dell'ambiente (limitata)

$$P'(t) = kP(t)\Big[1 - \frac{P(t)}{A}\Big] \qquad A > 0 \text{ capacità ambiente} \quad k > 0$$
$$\text{Se } P(t) > A \Rightarrow P'(t) < 0$$

$P'(t) = kP(t)\Big[1 - \frac{P(t)}{A}\Big]$ → è l'equazione differenziale del primo ordine

Le soluzioni **costanti** in cui $P(t) = cost$ sono $P(t) = A \rightarrow P'(t) = 0$ e $P(t) = 0 \rightarrow P'(t) = 0$

3. Equazioni del moto armonico



$$\overline{F} = m\overline{a}$$
$$-Kx(t)\underline{i} = m\overline{a}$$
$$\Rightarrow -kx(t)\underline{i} = mx''(t)\underline{i}$$

$$mx''(t) = -kx(t)$$
$$mx''(t) + kx(t) = 0$$
$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \qquad \frac{k}{m} > 0 \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

$\Rightarrow x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ → equazione differenziale di secondo ordine nella funzione incognita $x(t)$

Equazioni differenziali del 1° ordine

L'ordine massimo di derivazione è il primo (al massimo compare la derivata prima)

É un'equazione in cui **c'è un legame** tra la **funzione incognita** $y(x)$, la sua **derivata prima** $y'(x)$ e la **variabile indipendente** x.

$$F(x, y, y') = 0$$

> L'equazione differenziale è in **forma normale** se si riesce ad **esplicitare la** y'

$$y' = f(x, y) \Rightarrow \text{è in forma normale}$$

- Dove x è la variabile indipendente
- y è la funzione incognita
- Esempio:

  $P' = kP(1 - \frac{P}{A})$ → è in forma normale perchè la P' è esplicitata.

  C'è un legame tra $\overbrace{P}^{\text{f incognita}}, \underbrace{P'}_{\text{derivata}}, \overbrace{t}^{\text{v. indipendente}}$

$$F(t, P, P') = 0 \Rightarrow kP\left(1 - \frac{P}{A}\right) - P' = 0$$

Equazioni a variabili separate

Se l'equazione differenziale scritta in **forma normale** può essere scritta come il **prodotto** tra una funzione di $x \to g(x)$ e una funzione di $y \to h(y)$, allora si dice che è a **variabili separate.**

$$y' = f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

- Esempi

  - $$y' = e^{x+y} = \text{è a variabili separabili} \to g(x) = e^x \quad h(y) = e^y \\ \Rightarrow y' = e^x \cdot e^y$$
  - $$y' = e^{xy} = \text{NON è a variabili separabili}$$
  - $$y' = y^2 = \text{è a variabili separabili} \to g(x) = 1 \quad h(y) = y^2 \\ \Rightarrow y' = 1 \cdot y^2$$
  - $$P' = kP\left(1 - \frac{P}{A}\right) = \text{è a variabili separabili} \\ \to g(t) = k \quad h(P) = P\left(1 - \frac{P}{A}\right) \\ \Rightarrow P' = k \cdot P\left(1 - \frac{P}{A}\right)$$

Equazioni differenziali costanti

La soluzione di un'equazione differenziale è costante $y' = c \quad c = cost$ se $h(y) = 0$

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Cerchiamo gli zeri della funzione $h(y) \Rightarrow h(y) = 0$

▼ Esempio:

$$y' = x(y-1)^2 \qquad g(x) = x \quad h(y) = (y-1)^2$$
$$h(y) = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$y = 1 \leftarrow \text{Soluzione costante}$$

Soluzioni di un'equazione differenziale di 1° ordine a variabili separabili

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

1. Trovo le soluzioni costanti

Le funzioni $y = c$ con c tale che $h(c) = 0$

Sono gli zeri della funzione h.

2. Trovo le altre soluzioni

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$
$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$
$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int g(x) dx$$
$$\text{Sostituzione } y(x) = u$$
$$\int \frac{du}{h(u)} = \int g(x) dx \Rightarrow \text{Risostituisco } y$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$$

Avremmo anche potuto ricavarlo dalla notazione di Leibniz:

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$
$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$
$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$$

Integrale generale

L'integrale generale è la famiglia delle soluzioni **costanti** e delle altre **soluzioni**.

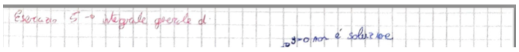
Procedura con cui si risolve il problema di cauchy

1. Determinare **l'integrale generale dell'equazione**, cioè una forma esplicita che contiene due costanti arbitrarie
2. Imporre, con un sistema, che **integrale generale soddisfi le condizioni iniziali**, determinando così il valore delle due costanti.
3. **Sostituire questi valori** nella formula dell'integrale generale.

Sostituzione canonica in un equazione omogenea

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$
$$y(x) = z(x) \cdot x$$
$$y'(x) = z'(x)x + z(x)$$

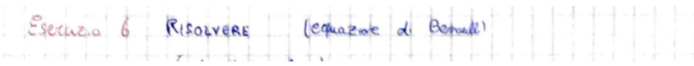
▼ Esempio $y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$ → equazione omogenea di grado 3



Esercizio 5 → integrale generale di

$y=0$ non è soluzione

▼ Problema di Cauchy con sostituzione



Esercizio 6 RISOLVERE (equazione di Bernoulli)

Esercizi integrale generale e problema di Cauchy di eq. a variabili separabili

▼ Esempio 1 → integrale generale e problema di Cauchy

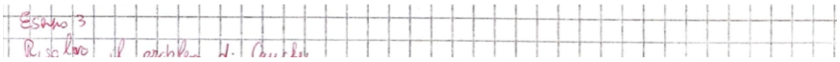
Esempio: $P'(t) = K P(t) \left[1 - P(t) \right]$ $\quad K, A > 0$

Problema di Cauchy

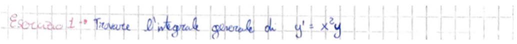
▼ Esempio 2 → integrale generale e problema di Cauchy

Esempio 2

▼ Esempio 3 → Problema di Cauchy, integrale generale e determinare gli intervalli



▼ Trovare l'integrale generale di $y' = x^2y$



▼ Risolvere il problema di Cauchy con $y' = y^2 \qquad y(0) = 1$ e dominio massimale o intervallo massimale

Per trovare l'intervallo massimale dobbiamo cercare il più grande insieme connesso che contiene la x del problema di Cauchy.

▼ Integrale generale, problema e teorema di Cauchy

▼ Soluzioni stazionarie, problema di Cauchy e sviluppo di Mac Laurin di $y' = e^t - 2e^{t-y}$

▼ Scrivere l'equazione della tangente e disegnare il grafico

▼ Trovare le curve $y = f(x)$ la cui tangente in $(x, f(x))$ interseca l'asse x in $(-x, 0)$

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

L'ordine massimo di derivazione è 1 → derivata prima.

$f(x, y, y') = 0$ → **equazione del primo ordine**

è lineare se:

$$y'a(x) + yb(x) = c(x)$$

- y' e y devono comparire al primo grado
- $a(x)$ e $b(x)$ si chiamano coefficienti
- $c(x)$ si chiama termine noto

Se dividiamo tutto per $a(x)$, l'equazione diventa: $y' + yp(x) = q(x)$

📌 La soluzione di un'equazione differenziale lineare a primo ordine, è la somma di una soluzione particolare più l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata

Struttura dell'integrale generale - Formula risolutiva (*)

Se p e q sono continue in $I \Rightarrow p(x)$ ha primitiva in I. Sia $P(x)$ la **primitiva** di $p(x)$

📌 $F(x) = \frac{x^2}{2}$ è primitiva di $f(x) = x$ → $F(x) = \int f(x)$

- Se $y' + yp(x) = q(x)$

  Allora la formula risolutiva è:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c \right)$$

- Se $y' = yp(x) + q(x)$

  Allora la formula risolutiva è:

$$y = e^{\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + c \right)$$

▼ Dimostrazione

$$y' + yp(x) = q(x) \Rightarrow [y' + yp(x)]e^{P(x)} = q(x)e^{P(x)}$$
$$\underbrace{y'e^{P(x)} + yP(x)e^{P(x)}} = q(x)e^{P(x)}$$
$$\left(y(x)e^{P(x)}\right)' = q(x)e^{P(x)}$$

> $y'e^{P(x)} + yP(x)e^{P(x)}$ è la derivata di $y(x)e^{P(x)}$

$$\Rightarrow y(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}dx$$

> 📌 Dove gli integrali, in questo caso, rappresentano solo **una primitiva**, non l'insieme di tutte le primitive.

Dividiamo tutto per $e^{P(x)}$, che equivale a moltiplicare per $e^{-P(x)}$

$$y(x) = e^{-P(x)}\left(\int q(x)e^{P(x)}dx + c\right)$$

Siccome $P(x)$ è una primitiva di $p(x)$, aggiungiamo l'integrale e scriviamo $p(x)$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$$

→ Formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del 1° ordine

---

Esercizi eq. lineare

▼ Esempio → risolvere l'eq. differenziale lineare in due intervalli

▼ Integrale generale di $y' + y\cot x = 2\cos x$ in $(0; \pi)$

▼ Problema di Cauchy $y' + \frac{y}{x} - 2\sin x = 0 \quad y(\pi) = 2$

Teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $a(x), b(x)$ coefficienti e $c(x)$ termine noto sono funzioni continue in $\mathcal{I}$, con $x_0 \in \mathcal{I}$, allora $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione definita nell'intervallo $\mathcal{I}$.

L'intervallo $\mathcal{I}$ da considerare è quindi l'intervallo che contiene x_0.

▼ Esempio: risolvere il problema di Cauchy

Intervallo massimale

1. Fai il dominio dell'equazione differenziale
2. Trova l'integrale generale
3. Risolvi il problema di Cauchy
4. Prendi l'intervallo del dominio più grande, che contiene x_0:

   x_0 lo si ricava dal problema di cauchy → $y(x_0) = 2$ → $y = 2, x = x_0$

Equazione differenziale ordinaria di 2° ordine

Equazione generale della dinamica: $my'' = F(t, y, y')$

É un'equazione in cui l'incognita è una funzione di una variabile $y(t)$ che compare nell'equazione anche mediante le sue derivate. L'equazione è del **secondo ordine** perché la **derivata di ordine più alto presente è la derivata seconda**.

$$F(t, y, y', y'') = 0$$

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

- $a, b, c, f(forzante)$ funzioni continue in un intervallo I, $a \neq 0$,

Se i coefficienti a, b, c sono **costanti:**

▼ Esempio circuiti elettrici.

▼ Pendolo, equazioni non lineari: fondamentale nel caso di piccole oscillazioni

---

Soluzioni di un'equazione differenziale di 2° ordine

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \qquad t \in I$$

- $a, b, c, f(forzante)$ funzioni continue in un intervallo I, $a \neq 0$,

La **soluzione** nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è una funzione $y : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte per cui, sostituendo nell'equazione differenziale i valori effettivi di $y(t), y'(t), y''(t)$, si ottiene che:

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I$$

▼ Esempio: verificare se una funzione è soluzione di un'equazione differenziale (É SOLUZIONE)

$$\begin{gathered} y'' - t' - 2y = 0 \qquad y(t) = e^{2t} \qquad y(t) \in \mathcal{C}^2, \text{ è soluzione?} \\ a(t) = 1 \quad b(t) = -1 \quad c(t) = -2 \quad f(t) = 0 \quad \text{continui } \forall t \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} y'(t) = 2e^{2t} \\ y''(t) = 4e^{2t} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 4e^{2t} - 2e^{2t} - 2(e^{2t}) = 0 \\ e^{2t}(4 - 2 - 2) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow y(t) = e^{2t} \text{ è soluzione!} \end{gathered}$$

▼ Esempio: verificare se una funzione è soluzione di un'equazione differenziale (NON É SOLUZIONE)

$$\begin{gathered} y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(t) = t^2 \qquad y(t) \in \mathcal{C}^2, \text{ è soluzione?} \\ a(t) = 1 \quad b(t) = -1 \quad c(t) = -2 \quad f(t) = 0 \quad \text{continui } \forall t \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} y'(t) = 2t \\ y''(t) = 2 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 2 - 2t - 2(t^2) = 0 \\ t^2 + t - 1 = 0 \qquad \cancel{\forall t \in \mathbb{R}} \to t_1, t_2 \\ \Rightarrow y(t) = t^2 \text{ NON è soluzione!} \end{gathered}$$

Quante soluzioni può avere un'equazione differenziale del secondo ordine?

- $y'' = 0$ → Le funzioni lineari $y = c_1 t + c_2 \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono funzioni con derivata seconda pari a 0 (le soluzioni di questa equazione sono infinite).

- $y'' = g \rightarrow y'(t) = gt + c_1 \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \rightarrow$ Le soluzioni di questa equazione sono infinite e dipendono da c_1, c_2.

Dobbiamo conoscere lo stato iniziale: $t = 0 \leftarrow$ i parametri e quindi le soluzioni, dipendono dalla scelta dello stato iniziale.

> 📌 Le **soluzioni** di un'**equazione differenziale del secondo ordine** in generale sono **infinite** e **dipendono dalla scelta di due parametri arbitrar**i.

L'integrale generale → è l'insieme di tutte le soluzioni in dipendenza da due **parametri**.

Problema di Cauchy

La coppia **equazione differenziale** + **condizioni iniziali**

Teorema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Garantisce un'unica soluzione per questo tipo di problema.

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \qquad t \in I$$

- $a, b, c, f(forzante)$ funzioni continue in un intervallo I, $a \neq 0$,

Allora $\forall t_0 \in I$ e $\forall (y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$

Risolvere il problema di Cauchy ha un significato fisico ben preciso: significa determinare la legge oraria di una certa grandezza fisica y(t), ad esempio la posizione di un punto materiale in movimento. All'istante $t = t_0$ con posizione y_0 e v_0 note

> 📌 Ha **una e una sola soluzione** definita in tutto l'intervallo

---

Procedura con cui si risolve il problema di cauchy

1. Determinare **l'integrale generale dell'equazione**, cioè una forma esplicita che contiene due costanti arbitrarie
2. Imporre, con un sistema, che **integrale generale soddisfi le condizioni iniziali**, determinando così il valore delle due costanti.
3. **Sostituire questi valori** nella formula dell'integrale generale.

▼ Esempio: $y'' - 3y' + 2y = t \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

1. Supponiamo di conoscere già l'integrale generale $\rightarrow y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4}$, che dipende da $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Risolvere il problema di Cauchy ci permette di trovare le costanti c_1, c_2 tale per cui $y(t)$ soddisfa le condizioni iniziali.
2. $y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{2 \cdot 0} + \frac{0}{2} + \frac{3}{4} \rightarrow c_1 + c_2 + \frac{3}{4} = 1 \leftarrow$ dalle condizioni iniziali
$y'(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} \rightarrow y'(0) = c_1 e^0 + 2c_2 e^{2 \cdot 0} + \frac{1}{2} \rightarrow c_1 + 2c_2 + \frac{1}{2} = -1 \leftarrow$ dalle condizioni iniziali
$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{3}{4} = 1 \\ c_1 + 2c_2 + \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 - \frac{3}{4} + 1 \\ c_1 + 2c_2 + \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 + \frac{1}{4} \\ -c_2 + \frac{1}{4} + 2c_2 + \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 + \frac{1}{4} \\ c_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow \Bigg\{$$
3. Soluzione: $y(t) = 2e^t - \dfrac{7}{4}e^{2t} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4} \leftarrow$ è una e una sola.

▼ Esempio $y'' - y - \cos x \qquad y(0) = -\frac{1}{2} \qquad y'(0) = 1$

▼ Esempio tracciare il grafico locale della soluzione del problema di Cauchy

▼ Risolvere il problema di Cauchy $y' = \frac{1}{2\sqrt{t}}y - \frac{1}{\sqrt{t}} \quad t > 0 \qquad y(1) = a$ e calcolare il limite $\lim_{t\to 1} \frac{y_a - a}{t-1}$

Struttura dell' integrale generale

Cioè com'è fatto l'insieme delle soluzioni dell'equazione.

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \qquad t \in I$$

- $a, b, c, f(forzante)$ funzioni continue in un intervallo I, $a \neq 0$,

Queste equazioni si chiamano lineari perchè:

$$y \to \boxed{a\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + c} \to \boxed{ay'' + by' + cy}$$
$$\Rightarrow L \to Ly$$
$$L = a\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + c$$
$$Ly = ay'' + by' + cy$$

Si dimostra perchè la derivata della somma di funzioni, è la somma delle derivate. La derivata del prootto per una costante è il prodotto della costante per la derivata della funzione.

$$Ly = f \to \text{Equazioni differenziali lineari}$$

Principio di sovrapposizione (*)

Quindi in generale: **Dimostrazione 1**

$$\begin{gathered} y_1 \to (Ly_1 = f_1)c_1 \\ + \\ y_2 \to (Ly_2 = f_2)c_2 \\ \Rightarrow \boxed{c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 = c_1 f_1 + c_2 f_2} \\ \Rightarrow L\underbrace{(c_1 y_1 + c_2 y_2)} = c_1 f_1 + c_2 f_2 \\ \Rightarrow L(y) = c_1 f_1 + c_2 f_2 \end{gathered}$$

$L(y)$ soddisfa l'equazione differenziale con forzante $c_1 f_1 + c_2 f_2$

Dimostrazione 2

$$a(x)(y_1'' + y_2'') + b(x)(y_1' + y_2') + c(x)(y_1 + y_2)$$
$$= \boxed{a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1} + \boxed{a(x)y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2} = f(x) + g(x)$$

Teorema 1 (principio di sovrapposizione) (*)

Se y_1 è **soluzione** di $ay'' + by' + cy = f_1$ (forzante f_1) e

y_2 è **soluzione** di $ay'' + by' + cy = f_2$ (forzante f_2)

→ allora la funzione $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ è **soluzione** di $ay'' + by' + cy = c_1 f_1 + c_2 f_2$

Struttura dell'integrale generale quando $f(t) = 0$ (termine noto = 0)

$$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow Ly = 0$$

y_1 è **soluzione dell'equazione omogenea** $Ly_1 = 0$

y_2 è **soluzione dell'equazione omogenea** $Ly_2 = 0$

Allora per il principio di sovrapposizione

$$\underbrace{L(c_1y_1 + c_2y_2)}_{L(y)=0} = c_1Ly_1 + c_2Ly_2 = 0$$
$$\Rightarrow L(y) = 0 \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Quinid ogni combinazione lineare dell'equazione omogenea, è ancora soluzione della stessa equazione.

> 📌 $\Rightarrow$ L'insieme **S** delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea **forma uno spazio vettoriale di dimensione pari all'ordine dell'equazione differenziale**.

Se $a(t) \neq 0$, quindi l'equazione è di ordine 2, allora anche la dimensione dello spazio vettoriale **S** è 2.

Teorema 2 (di struttura)

L'integrale generale $ay'' + by' + cy = 0$ e $a, b, c, f(forzante)$ funzioni continue in un intervallo I, $a(t) \neq 0 \; in \; I$, è dato da tutte le combinazioni lineari:

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dove y_1, y_2 sono due **soluzioni linearmente indipendenti** dell'equazione stessa.

▼ Dimostrazione

▼ Esempio: verificare che l'insieme delle soluzioni di $y'' + 4y = 0$ (integrale generale) è $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Verifichiamo che

$$y_1(t) = \cos 2t \qquad y_2(t) = \sin 2t$$

siano soluzioni dell'equazione differenziale e siano linearmente indipendenti.

1. **Verifichiamo che y_1 è soluzione**, calcolando e sostituendo in $y'' + 4y = 0$ le sue derivate:

$$y_1'(t) = -2 \sin 2t$$
$$y_1''(t) = -4 \cos 2t$$

$$-4 \cos 2t + 4 \cos 2t = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \text{L'identità è verificata e } y_1 \text{ è soluzione}$$

2. **Verifichiamo che y_2 è soluzione**, calcolando e sostituendo in $y'' + 4y = 0$ le sue derivate:

$$y_2'(t) = 2 \cos 2t$$
$$y_2''(t) = -4 \sin 2t$$

$$-4 \sin 2t + 4 \sin 2t = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \text{L'identità è verificata e } y_2 \text{ è soluzione}$$

3. Verifichiamo che le soluzioni sono **linearmente indipendenti,** quindi il loro rapporto non è costante:

$$\frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \frac{\sin 2t}{\cos 2t} = \tan 2t$$

$\tan 2t$ → non è costante, ma dipende appunto da t.

Struttura dell'integrale generale quando $f(t) \neq 0$ (termine noto ≠ 0)

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \qquad f \neq 0$$

$\Rightarrow Ly = a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y$

$\Rightarrow Ly = f$ ← **equazione non omogenea o equazione completa**

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \leftarrow \text{equazione omogenea associata}$$
$$Ly = 0$$

Supponiamo che:

- y_0 è **soluzione dell'equazione omogenea associata** $Ly_0 = 0$
- y_p è **soluzione dell'equazione completa** $Ly_p = f$

Per il principio di sovrapposizione:

$$L(y_0 + y_p) = Ly_0 + Ly_p = 0 + f = f$$

y_p è una soluzione di $Ly = f$

→ $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$ sono le soluzioni di $Ly = f$

y_0 è una soluzione di $Ly = 0$

Se invece:

- y_1 è **soluzione dell'equazione completa** $Ly_1 = f$
- y_2 è **soluzione dell'equazione completa** $Ly_2 = f$

Per il principio di sovrapposizione:

$$L(y_1 - y_2) = Ly_1 + Ly_2 = f - f = 0$$

É soluzione dell'equazione omogenea associata.

Teorema 3 (di struttura per le equazioni complete)

L'integrale generale di

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \qquad f \neq 0$$

- $a, b, c, f(forzante)$ funzioni continue in un intervallo I, $a \neq 0$,

è dato da tutte e sole le funzioni:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dove y_1 e y_2 sono due **soluzioni linearmente indipendenti** dell'equazione omogenea associata $a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0$ → sono soluzioni di $Ly = 0$

E y_p è una **soluzione particolare** dell'equazione completa $a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = f(t)$

▼ Dimostrazione

Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea di secondo ordine a coefficienti costanti

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Dal teorema di struttura sappiamo che per determinare l'integrale generale:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Con y_1, y_2 linearmente indipendenti e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso $\Delta > 0$

▼ Dimostrazione: Integrale generale di $y'' + 4y' + 3y = 0$

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$
$$a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = 3$$

Troviamo delle soluzioni che siano proporzionali alle loro derivate.

$y(t) = e^{\lambda t}$ ha derivata proporzionale alla funzione stessa → risolve l'equazione di partenza per qualche valore di λ?

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Sostituiamo y, y' e y'' nell'equazione differenziale, troviamo:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} = 0$$
$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0$$
$$\cancel{e^{\lambda t}}(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 \rightarrow \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -3$$

$y_1(t) = e^{-1t} \qquad y_2(t) = e^{-3t}$

Queste due funzioni non sono proporzionali perchè il loro rapporto è la funzione: $\dfrac{y_1(t)}{y_2(t)} = \dfrac{e^{-t}}{e^{-3t}} = e^{2t}$ ← che non è costante.

1. Cerchiamo soluzioni del tipo $y(t) = e^{\lambda t}$ dove λ è un parametro da determinare, con queste derivate:

   $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

   $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

2. Sostituiamo nell'equazione differenziale $ay'' + by' + cy = 0$ e raccogliamo $e^{\lambda t}$

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$$
$$e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$
$$\cancel{e^{\lambda t}}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0$$

   $y(t)$ è soluzione se e solo se $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

   $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ ← **polinomio caratteristico associato** all'equazione differenziale.

3. Risolviamo l'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

   Se $\Delta > 0$, il polinomio caratteristico ammette due radici reali distinte:

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$
$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

   Le funzioni y_1 e y_2 non sono mai costanti, infatti il loro rapporto è $\dfrac{y_1(t)}{y_2(t)} = \dfrac{e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_2 t}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ che dipende da t → $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

4. Dal teorema di struttura possiamo scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Come combinazione di y_1 e y_2 al variare delle costanti c_1, c_2.

▼ Esempio Risolviamo: $2y'' - y' - y = 0$

$$\begin{gathered} P(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda - 1 \\ 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \\ \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \\ \lambda_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \\ \lambda_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{gathered}$$

$y_1(t) = e^{1t}$ $\qquad y_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$ → sono linearmente indipendenti perchè il loro rapporto dipende da t.

Per il teorema di struttura, scriviamo l'integrale generale come:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

▼ $y'' - 2y' = 0$

Equazione caratteristica:

$$\begin{gathered} \lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ \lambda(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 \end{gathered}$$

Soluzione

$$\begin{gathered} y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \\ \Rightarrow y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} \\ y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} \end{gathered}$$

Caso $\Delta < 0$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\begin{gathered} P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \\ a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{gathered}$$

Le due soluzioni sono:

$$\begin{gathered} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \\ \alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \end{gathered}$$

L'equazione ha due soluzioni **reali, linearmente indipendenti:**

$$\begin{gathered} u_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ u_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{gathered}$$

Utilizzando il teorema di struttura, possiamo scrivere l'integrale generale:

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$$

▼ Dimostrazione: $y'' + 2y' + 10y = 0$ trovare l'integrale generale

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + 10 e^{\lambda t} \to e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\lambda + 10) = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = -36$$
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$$
$$\lambda_1 = -1 + 3i \qquad \lambda_2 = -1 - 3i$$

$y_1(t) = e^{(-1+3i)}t \qquad y_2(t) = e^{(-1-3i)}t$

Ricordando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso:

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$$

$y_1 = e^{-t}(\cos(3t) + i\sin(3t))$

$y_2 = e^{-t}(\cos(3t) - i\sin(3t))$

Ricordando che l'equazione è lineare omogenea e che quindi ogni combinazione di y_1, y_2 è ancora soluzione, possiamo costruire due funzioni reali:

- Una **sommando** y_1 e y_2:

$$u_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = e^{-t}\cos(3t)$$

- Una facendo la **differenza** di y_1, y_2:

$$u_2(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i} = e^{-t}\sin(3t)$$

Le due funzioni sono linearmente indipendenti perchè il loro rapporto non è costante (dipende da t)

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{e^{-t}\cos(3t)}{e^{-t}\sin(3t)} = \cot(3t)$$

L'integrale generale può essere infine scritto come:

$$y(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$
$$= e^{-t}(c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t))$$

▼ Esempio $y'' + y' + y = 0$

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Troviamo il polinomio caratteristico

$$\cancel{e^{\lambda t}}(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$
$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$$

Scriviamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2+\lambda+1=0$$
$$\Delta=-3<0$$

Quindi le soluzioni λ_1,λ_2 saranno due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1=\alpha+\beta i \qquad \lambda_2=\alpha-\beta i$$
$$\alpha=\frac{-b}{2a}=-\frac{1}{2}$$
$$\beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A queste due soluzioni dell'equazione caratteristica, corrispondono due soluzioni dell'equazione differenziale:

$$u_1(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$
$$u_2(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Utilizzando il teorema di struttura, siccome sappiamo che $u_1(t)$ e $u_2(t)$ possiamo scrivere l'integrale generale:

$$y(t)=e^{-\frac{1}{2}t}(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$$
$$\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Caso $\Delta=0$

Metodo 1

$$ay''+by'+cy=0$$

$a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t)=e^{\lambda t}$

$y'(t)=\lambda e^{\lambda t}$

$y''(t)=\lambda^2e^{\lambda t}$

$$P(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$$
$$a\lambda^2+b\lambda+c=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{b}{2a}$$

$$y_1(t)=e^{\lambda_1t}$$
$$y_2(t)=te^{\lambda_1t}$$

Sono linearmente indipendenti e sono soluzioni dell'equazione differenziale. Dal teorema di struttura, **l'integrale generale** è:

$$y(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2te^{\lambda_1t} \qquad \forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

▼ Dimostrazione: determinare l'integrale generale di $y''-6y'+9y=0$

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t)=e^{\lambda t}$

$y'(t)=\lambda e^{\lambda t}$

$y''(t)=\lambda^2e^{\lambda t}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$
$$\Delta = 36 - 36 = 0$$

Siccome il discriminante è nullo, l'equazione caratteristica ha due radici reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Questo metodo ci permette di trovare solo una soluzione dell'equazioni differenziale: $y_1 = e^{3t}$. Tra le soluzioni ci sono anche tutti i multipli di e^{3t} → $y_1(t) = ce^{3t} \qquad c \in \mathbb{R}$. Per trovare l'integrale generale ci occorre un'altra soluzione **linearmente indipendente** da $y_1 = ce^{3t}$.

Per fare ciò troviamo $y_2 = c(t)e^{3t}$ che risolva l'equazione differenziale $y'' - 6y' + 9y = 0$. Per vedere quali condizioni deve rispettare c, calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$y_2 = c(t)e^{3t}$$
$$y_2' = c'(t)e^{3t} + 3c(t)e^{3t}$$
$$y_2'' = c''(t)e^{3t} + 3c'(t)e^{3t} + 3c'(t)e^{3t} + 9c(t)e^{3t}$$

Sostituiamole ora nell'equazione differenziale:

$$e^{3t}[c''(t) + 6c'(t) + 9c(t)] - 6e^{3t}[c'(t) + 3c(t)] + 9c(t)e^{3t} = 0$$
$$\Rightarrow \cancel{e^{3t}}[c''(t) + \cancel{6c'(t)} + \cancel{9c(t)} - \cancel{6c'(t)} - \cancel{18c(t)}] + \cancel{9c(t)} = 0$$

$$\Rightarrow c''(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

La condizione su c ci dice che deve avere derivata seconda nulla per ogni t

Per trovare la costante c baserà integrare due volte:

$$c''(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$c'(t) = c_1$$
$$c(t) = c_1 t + c_2 \qquad \forall c_1, c_2$$

In particolare $c(t) = t$ soddisfa la nostra condizione.

Quindi:

$$y_1 = e^{3t}$$
$$y_2 = te^{3t}$$

Risolve l'equazione differenziale. Siccome e y_1 è linearmente indipendente da y_2 (non proporzionale al rapporto)

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{3t}}{t} = \frac{1}{t} \to \text{ non è costante}$$

Quindi grazie al teorema di struttura, l'integrale generale è la combinazione di y_1, y_2 per ogni valore delle costanti reali c_1, c_2

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = e^{3t}(c_1 t + c_2)$$

▼ Esempio: $y'' + 4y' + 4y = 0$

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 4\lambda + 4)$$
$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$\Delta = 0 \qquad (\lambda + 2)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$$y_1(t) = e^{-2t} \qquad y_2(t) = te^{-2t}$$

Per il teorema di struttura, l'integrale generale è:

$$y(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

▼ Esempio $y'' + 2ky' - 3(2k+3)y = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

Integrale generale - Riepilogo

Equazione differenziale del secondo ordine omogenea

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ → coefficienti costanti

Le soluzioni (integrale generale) sono uno spazio vettoriale di dimensione 2:

- $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

Dove $y_1(t), y_2(t)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Per determinare queste due soluzioni, scriviamo l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale:

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \rightarrow \text{Polinomio caratteristico}$$
$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \rightarrow \text{Equazione caratteristica}$$

E si trovano le soluzioni dell'equazione caratteristica. In base al Δ abbiamo:

$$\Delta < 0$$
$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Problema di Cauchy

📌 Dal teorema di Cauchy sappiamo che il problema ha soluzione, è unica ed è definita su tutto $\mathbb{R}$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ → coefficienti costanti

L'integrale generale che rappresenta la totalità delle soluzioni, dipende da due parametri arbitrari

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Per ottenere un'unica soluzione, occorre imporre delle condizioni iniziali del tipo:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

(ad un certo istante t_0, y e y' assumono certi valori assegnati y_0, v_0).

> 📌 Il problema di cauchy consiste nel risolvere l'equazione differenziale + le condizioni iniziali

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Significa determinare la legge con cui varia nel tempo una certa grandezza fisica $y(t)$: Esempio → posizione di un punto materiale in movimento su una retta con le condizioni iniziali note.

▼ Esempio, problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$
$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$$
$$\lambda_1 = -1 + 2i \qquad \lambda_2 = -1 - 2i$$

$$u_1(t) = e^{-t}\cos(2t)$$
$$u_2(t) = e^{-t}\sin(2t)$$

Dal teorema di struttura scrivamo l'integrale generale come la combinazione lineare di u_1, u_2:

$$y(t) = e^{-t}(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t))$$

Troviamo ora per quale valore di c_1, c_2 sono soddisfatte le condizioni iniziali:

- $y(0) = 1$ → sostituiamo nell'integrale generale

$$y(0) = e^0(c_1\cos(2\cdot 0) + c_2\sin(2\cdot 0))$$
$$y(0) = c_1$$
$$c_1 = 1$$

- $y'(0) = -1$

  Calcoliamo la derivata prima dell'integrale generale

$$y'(t) = -e^{-t}(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)) + e^{-t}\cdot(-2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t))$$

  E ora valutiamo y' in 0 (come da condizione iniziale)

$$y'(0) = -e^0(c_1\cos(2\cdot 0) + c_2\sin(2\cdot 0) + e^0(-2c_1\sin(2\cdot 0) + 2c_2\cos(2\cdot 0))$$
$$\Rightarrow y'(0) = -c_1 + 2c_2$$
$$-1 = -c_1 + 2c_2$$
$$-1 = -1 + 2c_2$$
$$c_2 = 0$$

  L'integrale generale che rispetta le condizioni iniziali sarà quindi la soluzione del problema di Cauchy:

  Sostituiamo c_1 e c_2 all'interno dell'integrale generale

$$y(t) = e^{-t}(\cos(2t) + 0)$$

Equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti completa $f(t) \neq 0$ (non omogenea)

Metodo di somiglianza

📌 Non è un metodo che funziona sempre.

Consideriamo un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti **costanti**, **completa**, con un termine noto $f(t) \neq 0$

$f(t)$ è il significato di una forza che agisce dall'esterno sul sistema. Viene chiamato anche **forzante**

L'integrale generale dell'equazione **completa:**

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$
$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Dove $c_1 y_1 + c_2 y_2$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.
- y_p → soluzione particolare dell'equazione completa

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad a \neq 0$$

Equazione lineare con a, b, c costanti.

$$y \to \boxed{Ly} = ay'' + by' + cy$$
$$Ly = f(t)$$

▼ $f(t)$ è una funzione esponenziale

$$y(t) = ce^{\alpha t}$$
$$y'(t) = \alpha ce^{\alpha t}$$
$$y''(t) = \alpha^2 ce^{\alpha t}$$

$$Ly = Lce^{\alpha t} = a(\alpha^2 Ce^{\alpha t}) + b(\alpha Ce^{\alpha t}) + cCe^{\alpha t}$$
$$= \underbrace{(a\alpha^2 + b\alpha + c)}_{\text{costante}} Ce^{\alpha t}$$

▼ $f(t)$ è una funzione di tipo polinomiale

$$y(t) = t^2 + t$$
$$y'(t) = 2t + 1$$
$$y''(t) = 2$$

In uscita avremo ancora un polinomio di grado uguale o inferiore.

$$Ly = L(t^2 + t) = 2a + b(2t + 1) + c(t^2 + t)$$
$$= 2a + t(2b + c) + ct^2 \qquad c \neq 0$$

▼ $f(t)$ è una funzione di tipo trigonometrico

$$y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$$
$$y'(t) = -2\sin(2t) + 2\cos(2t)$$
$$y''(t) = -4\cos(2t) - 4\sin(2t)$$

$$Ly = a(-4\cos(2t) - 4\sin(2t)) + b(-2\sin(2t) + 2\cos(2t)) + c(\cos(2t) + \sin(2t))$$
$$= (-4a + 2b + c)\cos(2t) + (-4a - 2b + c)\sin(2t)$$

Quando il termine noto ha una forma **esponenziale, polinomiale** o **trigonometrica,** oppure è il prodotto di due funzioni di questo tipo, si può cercare una soluzione dell'equazione differenziale completa, simile al termine noto stesso.

Forzante $f(t)$ esponenziale

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad a \neq 0$$

$$f(t) = Ae^{\alpha t}$$

Con A e α **costanti assegnate**. Cerchiamo quindi una soluzione particolare di tipo esponenziale (per via del metodo di somiglianza).

▼ Esempio $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ → troviamo la soluzione particolare

$y_p(t) = c \cdot e^{2t}$ ← soluzione particolare di questa equazione

$$y_p'(t) = 2ce^{2t}$$
$$y_p''(t) = 4ce^{2t}$$

Sostituiamo ora le derivate nell'equazione differenziale

$$4ce^{2t} + 4ce^{2t} - 3ce^{2t} = e^{2t}$$
$$e^{2t}(4c + 4c - 3c) = e^{2t}$$
$$e^{2t}(5c) = e^{2t}$$

Deve essere soddisfatta per ogni valore di t

$$5c = 1$$
$$c = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{5}e^{2t}$$

▼ Caso in cui il metodo di somiglianza non funziona

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3t}$$
$$y_p(t) = ce^{-3t}$$
$$y_p'(t) = -3ce^{-3t}$$
$$y_p''(t) = 9ce^{-3t}$$
$$(9c - 6c - 3c)e^{-3t} = e^{-3t}$$
$$0c = 1$$

Questa equazione non ha soluzione, non esiste alcun valore di c che risolva l'equazione.

Questo succede perchè e^{-3t} è una s**oluzione dell'equazione omogenea associata**, perchè il suo polinomio caratteristico ammette le due radici reali $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$

Dunque tutte le soluzioni del tipo e^{-3t} sono soluzioni dell'equazione omogenea associata e non possono essere soluzioni dell'equazione non omogenea

$$L(e^{-3t}) = 0$$

Per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea, occorre partire da una soluzione di prova di tipo diverso. L'idea è quella di trovare una soluzione che si scosti il meno possibile da quella cercata all'inizio, **correggendo la sua forma, moltiplicando per t.**

Cerchiamo dunque una soluzione del tipo $y_p(t) = cte^{-3t}$

$$y_p'(t) = ce^{-3t} - 3tce^{-3t}$$
$$y_p''(t) = -3ce^{-3t} - 3ce^{-3t} + 9tce^{-3t}$$

Inseriamo le derivate prima e seconda nell'equazione di partenza:

$$(-6ce^{-3t}+9cte^{-3t})+2(ce^{-3t}-3cte^{-3t})-3(cte^{-3t})=e^{-3t}$$

$$e^{-3t}[(-6c+2c)+\cancel{t(9c-6c-3c)}]=e^{-3t}$$
$$-4c\cancel{e^{-3t}}=\cancel{e^{-3t}}$$
$$c=-\frac{1}{4}$$

Quindi $y_p(t)=-\frac{1}{4}te^{-3t}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Metodo risolutivo forzante esponenziale

$$ay''+by'+cy=Ae^{\alpha t} \qquad a\neq 0$$

Calcoliamo prima le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale omogenea.

- Troviamo la **prima parte dell'integrale generale**, calcolando $y_1(t)$ e $y_2(t)$ che sono le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata $ay''+by'+cy=0$
- Per trovare la soluzione particolare: $y_p(t)$
  - Se α **non è radice del polinomio caratteristico**, allora la soluzione particolare è data da:
  $$y_p(t)=ce^{\alpha t}$$
  - Se α **è radice singola del polinomio caratteristico** (uno solo tra λ_1 e λ_2, è **uguale ad** α)
  $$y_p(t)=cte^{\alpha t}$$
  - Se α **è radice doppia del polinomio caratteristico** $(\lambda_1=\lambda_2=\alpha)$
  $$y_p(t)=ct^2e^{\alpha t}$$
  - Calcoliamo le **derivate prima e seconda** di $y_p(t)$
  - **Sostituiamo** le derivate nell'equazione differenziale di partenza e troviamo il valore di c
- Componiamo **l'integrale generale**:

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+y_p(t)$$
$$\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Forzante $f(t)$ polinomiale

$$ay''+by'+cy=f(t) \qquad a\neq 0$$

$$f(t)=\text{Termine noto, è un polinomio}$$

- Se y è un polinomio di grado n
  - y' è un polinomio di grado $n-1$
  - y'' è un polinomio di grado $n-2$

$Ly=ay''+by'+cy$ con $c\neq 0$ è un polinomio di grado n.

Cercare una funzione particolare che somiglia alla forzante, signifca cercare un polinomio di grado n:

▼ Esempio: soluzione particolare $y_p(t)$ di $y''+2y'-3y=t^2-2$

Cerchiamo un polinomio di 2° grado → metodo di somiglianza $y_p(t)=At^2+Bt+C$ con A,B,C da determinarsi in modo che $y_p(t)$ sia una soluzione particolare.

$$y_p'(t) = 2At + B$$
$$y_p''(t) = 2A$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale

$$2A + 2(2At + B) - 3(At^2 + Bt + C) = t^2 - 2$$
$$-3At^2 + t(4A - 3B) + 2A + 2B - 3C = t^2 - 2$$

Costruiamo il sistema lineare (prinicpio d'identità dei polinomi)

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ 4A - 3B = 0 \\ 2A + 2B - 3C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{4}{3} - 3B = 0 \\ 2A + 2B - 3C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} - \frac{8}{9} - 3C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = -\frac{4}{9} \\ C = \frac{4}{27} \end{cases}$$

Sostituiamo A, B, C in $y_p(t)$:

$$y_p(t) = -\frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{4}{27}$$

Che è una soluzione particolare dell'equazione completa...

▼ Esempio in cui il polinomio di grado uguale al grado della forzante, non ci permette di trovare $y_p(t)$

$$y'' + 2y' = 3t$$
$$f(t) = \text{polinomio di grado } 1$$

Cerchiamo una soluzione che sia un polinomio di grado 1: $y_p(t) = At + B$ con A, B da determinare.

$$y'(t) = A$$
$$y''(t) = 0$$

Sostituiamo nell'equazione: $2A = 3t \rightarrow 3t - 2A = 0$ la quale non è un'identità per nessuna scelta di A, B.

Nell'equazione differenziale manca il termine lineare in y, perchè $c = 0$. Di conseguenza la funzione in uscita non è di 1° grado, dobbiamo mettere in ingresso un polinomio di grado 2: $y_p(t) = At^2 + bt + c$

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C$$
$$y'p(t) = 2At + B$$
$$y_p''(t) = 2A$$

$$2A + 2(2At + B) = 3t$$
$$(4A - 3)t + 2A + 2B = 0$$

$$\begin{cases} 4A - 3 = 0 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$$
$$A = \frac{3}{4} \qquad B = -\frac{3}{4}$$

C è indefinita, ma siccome $y_p(t)$ compare nell'equazione solo tramite le sue derivate, il coefficiente additivo è irrilevante. Quindi per esempio $C = 0$

$$y_p(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}t$$

📌 Essendo f polinomio di 1 grado, un'altra forma della $y_p(t) = t(At + B)$, anzichè $y_p(t) = At^2 + Bt + C$

Metodo risolutivo forzante polinomiale

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad a \neq 0$$
$$f(t) = \text{polinomio}$$

Calcoliamo prima le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale omogenea.

- Troviamo la **prima parte dell'integrale generale**, calcolando $y_1(t)$ e $y_2(t)$ che sono le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata $ay'' + by' + cy = 0$
- Per trovare la soluzione particolare: $y_p(t)$

  Per trovare una soluzione particolare, si deve partire dal più generale dei polinomi di grado n

  Prendiamo un polinomio del tipo $y_p(t) = At^2 + Bt + C$ dello stesso grado della forzante $f(t)$:

  - Grado 1: $p_n = At + B$
  - Grado 2: $p_n = At^2 + Bt + C$

  Facciamo la derivata prima e seconda

$$y'(t) = 2At + B$$
$$y''(t) = 2A$$

  - Sostituendo le derivate prima e seconda dell'equazione differenziale, ci troveremo a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \text{sistema lineare di} \\ n+1 \text{ equazioni e} \\ n+1 \text{ incognite} \end{cases}$$

  Determiniamo A, B, C.

  $p_n$in base al grado della forzante $f(t)$

  - Grado 1: $p_n = At + B$
  - Grado 2: $p_n = At^2 + Bt + C$

- Componiamo **l'integrale generale**:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$
$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

▼ Esempio $y'' - 4y = x - 1$

▼ Esempio $y'' + 2y' = t^2 + 1$

▼ Esempio $y'' - 10y' + 26y = -5e^{5x} + 26x$ forzante esponenziale e polinomiale

Forzante trigonometrica

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad a \neq 0$$

$$f(t) = \text{Termine noto trigonometrico}$$
$$f(t) = A\cos(vt) + B\sin(vt)$$

▼ Esempio → $y'' + 2y' - 3y = \cos(2t) - 3\sin(2t)$

In accordo con il metodo di somiglianza, cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$
\begin{gathered}
y_p(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\
y_p'(t) = -2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t) \\
y_p''(t) = -4c_1\cos(2t) - 4c_2\sin(2t)
\end{gathered}
$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$
-4c_1\cos(2t) - 4c_2\sin(2t) + 2(-2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t)) - 3(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)) = \cos(2t) - 3\sin(2t)
$$

$$
(-7c_1 + 4c_2)\cos(2t) + (-7c_2 - 4c_1)\sin(2t) = \cos(2t) - 3\sin(2t)
$$

Siccome vogliamo che questa sia un'identità per ogni valore di t, quindi i coefficienti al primo e secondo membro di $\sin(2t)$ e $\cos(2t)$ coincidano

$$
\begin{cases} -7c_1 + 4c_2 = 1 \\ -7c_2 - 4c_1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{13} \\ c_2 = \frac{5}{13} \end{cases}
$$

Sostituiamo ora in $y_p(t)$ e troviamo una soluzione particolare dell'equazione completa:

$$
y_p(t) = \frac{1}{13}\cos(2t) + \frac{5}{13}\sin(2t)
$$

▼ Esempio in cui il metodo di somiglianza fallisce

$$
\begin{gathered}
y'' + 9y = 2\sin(3t) \\
y_p(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)
\end{gathered}
$$

Però le radici dell'equazione omogenea associata sono complesse coniugate, $\lambda^2 + 9 = 0 \to \lambda \pm 3i$

Dunque l'equazione omogenea ammette due soluzioni indipendenti $y_0(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)$ → ne segue quindi che applicando l'operatore Ly_p a questa funzione, troviamo 0 per ogni scelta delle costanti e non saremo mai in grado di generare una soluzione particolare dell'equazione completa → in altre parole $L(2\sin(3t)) = 0$, la forzante è una soluzione dell'equazione omogenea. **Questo è il caso della risonanza**.

Quindi utilizzeremo:

$$
y_p(t) = t(c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t))
$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda e sostituiamo nell'equazione differenziale:

I termini moltiplicati per t si elidono e imponendo che questa sia un'identità, troviamo due valori non nulli di c_1, c_2.

Quindi la soluzione particolare dell'equazione non omogenea è:

$$
y_p(t) = -\frac{1}{3}t\cos(3t)
$$

📌 **N.B**: anche se nella forzante compare solo il sin o solo il cos, comunque la soluzione particolare sarà della forma $y_p(t) = c_1\cos(\nu t) + c_2\sin(\nu t)$

Metodo risolutivo forzante trigonometrica

$$
\begin{gathered}
ay'' + by' + cy = f(t) \qquad a \neq 0 \\
f(t) = \text{trigonometrica} = A\cos(\nu t) + B\sin(\nu t)
\end{gathered}
$$

Calcoliamo prima le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale omogenea.

- Troviamo la **prima parte dell'integrale generale**, calcolando $y_1(t)$ e $y_2(t)$ che sono le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata $ay'' + by' + cy = 0$
- Per trovare la soluzione particolare: $y_p(t)$
  - Se $b \neq 0$

    $y_p(t) = c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t)$ con c_1, c_2 da determinarsi. Calcolando le due derivate, prima e seconda

    $$y_p'(t) = -vc_1 \sin(vt) + vc_2 \cos(vt)$$
    $$y_p''(t) = -v^2 c_1 \cos(vt) - v^2 c_2 \sin(vt)$$

    E sostituendole poi nell'equazione $ay'' + by' + cy = A\cos(vt) + B\sin(vt)$, otterremo:

    $$(-av^2c_1 + bvc_2 + cc_1)\cos(vt) + (-av^2c_2 - bvc_1 + cc_2)\sin(vt) = A\cos(vt) + B\sin(vt)$$

    Dal quale ricaviamo il sistema per determinare c_1, c_2:

    $$\begin{cases} (-av^2 + c)c_1 + bvc_2 = A \\ -bvc_1 + (-av^2 + c)c_2 = B \end{cases}$$

    e quindi trovermo la soluzione particolare $y_p(t)$.
  - Se $b = 0 \qquad w = \nu \rightarrow \nu = \sqrt{\frac{c}{a}}$

    $$y_p(t) = t(c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t))$$

    Calcolando le due derivate, prima e seconda

    $$y_p'(t) = c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t) - t(\nu c_1 \sin(\nu t) + \nu c_2 \cos(\nu t))$$
    $$y_p''(t) = -\nu t c_1 \sin(\nu t) + \nu c_2 \cos(\nu t) - \nu c_1 \sin(\nu t) + \nu c_2 \cos(\nu t) - t(\nu^2 c_1 \cos(\nu t) - \nu^2 c_2 \sin(\nu t))$$

    E sostituendole poi nell'equazione $ay'' + by' + cy = A\cos(vt) + B\sin(vt)$,

    $a(-\nu t c_1 \sin(\nu t) + \nu c_2 \cos(\nu t) - \nu c_1 \sin(\nu t) + \nu c_2 \cos(\nu t) - t(\nu^2 c_1 \cos(\nu t) - \nu^2 c_2 \sin(\nu t))) + b(c_1 \cos(\nu t) +$

    ricaviamo il sistema per determinare c_1, c_2:

    $$\begin{cases} 2a\nu c_2 - at\nu^c c_1 + bc_1 - bt\nu c_1 + ctc_1 = A \\ -2a\nu t c_1 - at\nu^2 c_1 + bc_2 + bt\nu c_1 + ctc_2 = B \end{cases}$$

    e quindi trovermo la soluzione particolare $y_p(t)$.
- Componiamo **l'integrale generale**:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$
$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

▼ Esempio: $y'' + y' = \cos x$

▼ Esempio $y'' + 4y = e^x \cos x$

Riepilogo soluzioni particolari forzante ≠ 0

Equazione di 2° ordine a coefficienti non costanti

- ▼ Esempio $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$