Modelli di ottimizzazione

Ottimizzazione lineare (continua)

Problema di mix produttivo

Quale quantità di ogni prodotto è possibile realizzare nel rispetto della capacità produttiva e con l'obiettivo di massimizzare i profitti?

- n prodotti ed m risorse produttive
- c_j: margine di contribuzione del prodotto j
- a_{ij}: assorbimento di risorsa i da parte del prodotto j
- b_i: disponibilità della risorsa i
- x_j: quantità di prodotto j da realizzare

$\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots$

sa $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n2 \leq b_m$ | Risorse utilizzate $\leq$ risorse disponibili

$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$

Problema della dieta

Come miscelare opportunamente i componenti per ottenere un prodotto finito che rispetti i requisiti previsti e minimizzi i costi totali d'acquisto?

- n componenti (ingredienti) ed m fattori qualitativi
- c_j: costo d'acquisto del componente j
- a_{ij}: contenuto del fattore i da parte del componente j
- b_i: requisito minimo sul fattore i
- x_j: quantità del componente j da utilizzare

$\min\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots$

Requisito ottenuto $\geq$ requisito minimo richiesto | sa $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$

Problema del trasporto

Come determinare il piano di trasporto ottimale che consente di soddisfare la domanda, rispettando la capacità disponibile?

- m origini ed n destinazioni
- a_i: disponibilità presso l'origine i
- d_j: domanda della destinazione j
- c_{ij}: costo di trasporto unitario da i a j
- x_j: quantità da trasportare da i a j

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sa $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad \forall i$ | Capacità

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j$ | Domanda

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j$

Ammissibilità:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Pianificazione multi-periodo

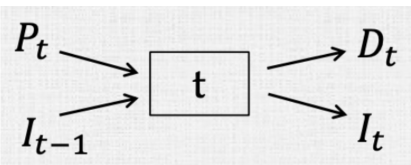
Si vuole determinare il piano di produzione ottimale su un orizzonte multi-periodo: devono essere decisi i livelli di produzione e le quantità da mantenere a scorta.

- d_{jt} domanda per il prodotto j nel periodo t
- b_{it}: quantità di risorsa i disponibile nel periodo t
- a_{ij}: assorbimento unitario della risorsa i da parte del prodotto j
- c_{jt}: costo unitario di produzione per il prodotto j nel periodo t
- h_{jt}: costo unitario di mantenimento a scorta per il prodotto j nel periodo t
- P_{jt}: quantità di prodotto j da realizzare nel periodo t
- I_{jt}: quantità di prodotto j tenuta a scorta alla fine del periodo t

$$\min \sum_{j,t} (c_{jt} P_{jt} + h_{jt} I_{jt})$$

Vincolo di bilancio o di **consistenza logica** | sa $P_{jt} + I_{j,t-1} - I_{jt} = d_{jt} \quad \forall j, t$

Vincoli di capacità | $\sum_{j} a_{ij} P_{jt} \leq b_{it} \quad \forall i, t$



$P_{jt}, I_{jt} \geq 0 \quad \forall j, t$

Ottimizzazione intera

Problema dello zaino (knapsack) - Capital budgeting

Quali oggetti si possono caricare nel contenitore, senza violarne la capacità, per massimizzare il valore complessivo del carico?

- n oggetti
- p_j: valore dell'oggetto j
- w_j: ingombro/peso dell'oggetto j
- b: capacità del contenitore
- $x_j \begin{cases} 1 \text{ Se l'oggetto j viene scelto} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

n possibili investimenti -

p_j: redditività del j-esimo investimento -

w_j: capitale richiesto dall'investimento j-esimo -

b: capitale a disposizione -

$x_j \begin{cases} 1 \text{ Se l'investimento j viene effettuato} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$ -

$$\max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b$$

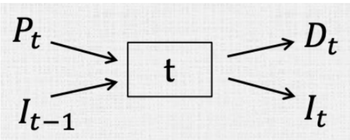
$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\ldots,n$

$(0 \leq x_j \leq 1, x_j$ intera)

Pianificazione produttiva con lotti minimi

Si vuole determinare il piano di produzione ottimale su un orizzonte multi-periodo: devono essere decisi i livelli di produzione e le quantità da mantenere a scorta.

- d_{jt} domanda per il prodotto j nel periodo t
- b_{it}: quantità di risorsa i disponibile nel periodo t
- a_{ij}: assorbimento unitario della risorsa i da parte del prodotto j
- c_{jt}: costo unitario di produzione per il prodotto j nel periodo t
- h_{jt}: costo unitario di mantenimento a scorta per il prodotto j nel periodo t
- P_{jt}: quantità di prodotto j da realizzare nel periodo t
- I_{jt}: quantità di prodotto j tenuta a scorta alla fine del periodo t
- l_j: dimensione minima del lotto di produzione
- γ: costante grande a sufficienza (ad es. maggiore del max. volume producibile)
- $Y_{jt} \begin{cases} 1 \text{ Se } P_{jt} > 0 \text{ (decido di produrre)} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$



$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} (c_{jt}P_{jt} + h_{jt}I_{jt})$$

Vincolo di bilancio o di **consistenza logica** | sa $P_{jt} + I_{j,t-1} - I_{jt} = d_{jt} \quad \forall j,t$

Vincoli di capacità delle risorse | $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_{jt} \leq b_{it} \quad \forall i,t$

Condizione di lotto minimo | $P_{jt} \geq l_j Y_{jt}$

Relazione di forzatura della variabile | $P_{jt} \leq \gamma Y_{jt}$

$$P_{jt}, I_{jt} \geq 0 \ , Y_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j,t$$

La relazione di forzatura della variabile deve diventare ridondante. Senza quel vincolo $P = 3, Y = 0$ è ammissibile anche se scorretta. In pratica il vincolo deve diventare ridondante in modo da non introdurre altre condizioni.

Pianificazione produttiva con costi fissi

Spesso nell'ambito dell'attività di pianificazione produttiva, è necessario considerare un **costo fisso di attrezzaggio** f_{jt}, **indipendente dal volume produttivo realizzato**.

- $c_j(P_{jt}) = \begin{cases} f_{jt} + c_{jt}P_{jt} & \text{se } P_{jt} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- f_{jt} : costo fisso

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} (c_{jt}P_{jt} + h_{jt}I_{jt} + f_{jt}Y_{jt})$$

$f_{jt}Y_{jt}$ è una forzatura a 0.
Se il problema fosse stato di $\max$ la condizione $Y_{jt=1}$ era garantita dalla funzione obiettivo.

$$\text{sa } P_{jt} + I_{j,t-1} - I_{jt} = d_{jt} \quad \forall j,t$$

Vincolo di bilancio o di **consistenza logica**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_{jt} \leq b_{it} \quad \forall i,t$$

Vincoli di capacità delle risorse

$$P_{jt} \leq \gamma Y_{jt}$$

Relazione di forzatura della variabile. Se il problema fosse stato di $\max$, la $Y_{jt} = 0$ doveva essere garantita qui.

$$P_{jt}, I_{jt} \geq 0 \text{ , } Y_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j,t$$

Localizzazione di impianti

Estensione del problema del trasporto. Quali impianti attivare, tra l'insieme di quelli disponibili, per consentire il rifornimento delle destinazioni a costo minimi? Come effettuare il rifornimento?

- m località in cui è possibile attivare un impianto
- n: destinazioni da rifornire
- a_i: capacità massima dell'impianto attivato nella località i
- d_j: livello della richiesta da parte della destinazione j
- f_i: costo fisso per l'attivazione di un impianto nella località i
- c_{ij}: costo da sostenere per servire la destinazione j dalla località i
- x_{ij}: quantità trasportabile da i a j
- $y_i \begin{cases} 1 \text{ Se l'impianto viene attivato} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i \rightarrow$ attivazione degli impianti, se ho k impianti da attivare $\sum_{i=1}^{m} y_1 = k$

sa $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i y_i \quad \forall i$ | Vincolo di capacità

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$
$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

Problema di scheduling

Programmazione operativa della produzione (attività per attività). Non conosco a priori l'ordine di lavorazione, l'obiettivo del problema è proprio quello di conoscere l'ordine di lavorazione ottimale. Per ogni coppia devo considerare tutte le coppie di prodotti $Y_{ABi} = 1$ (A viene lavorato prima di B sulla macchina i), $Y_{BAi} = 0$ (B non viene lavorato prima di A sulla macchina i).

- m macchine per la lavorazione
- n: ordini di lavorazione da eseguire
- d_j: data di consegna prevista per l'ordine j
- s_{ji}: durata della lavorazione prevista per l'ordine j sulla macchina i
- Γ: limitazione superiore alla data di completamento $\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} s_{ji}$
- t_{ji}: istante di inizio lavorazione dell'ordine (prodotto) j sulla macchina i
- T: istante di completamento finale di tutte le lavorazioni
- $Y_{jki} \begin{cases} 1 \text{ Se l'ordine j viene svolto prima dell'ordine k sulla macchina i} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

$\min T$

sa $t_{jm} + s_{jm} \leq T$ | Completamento. L'istante d'inizio dell'ultima lavorazione + la sua durata devono coincidere con l'istante di fine

$t_{jm} + s_{jm} \leq d_j$ | Rispetto data di consegna

$t_{ji} + s_{ji} \leq t_{j,i+1}$ | Ordine di lavorazione, ciclo tecnologico (finisco la lavorazione sulla macchina 1 prima di iniziare la lavorazione sulla macchina 2)

$t_{ji} + s_{ji} \leq t_{ki} + \Gamma(1 - Y_{jki})$
$t_{ki} + s_{ki} \leq t_{ji} + \Gamma Y_{jki}$ | Vincoli *either*-or. Non contemporaneità dei prodotti sulle macchine. Uno e uno solo di essi deve essere soddisfatto.

$t_{ij} \geq 0, T \geq 0, Y_{jki} \in \{0,1\}$

È necessario solo il vincolo dell'ultimo prodotto, gli altri prodotti sono ridondanti.
$T \geq$ valore di fine di A,B,C... È un maggiorante che va minimizzato.

Esempio vincoli either-or

Γ grande a piacere (stimato accuratamente -> data finale)

a) j è prima di k (prima finisco j e dopo (ore, mesi, minuti) inizio k

- Se $Y_{jki} = 1$

$$\underline{t_{ji} + s_{ji}} \leq t_{ki} + \cancel{\Gamma(1 - Y_{jki})}$$

fine di j sulla macchina i

- Se $Y_{jki} = 0$

$t_{ji} + s_{ji} \leq t_{ki} + \Gamma(1 - Y_{jki})$ è sempre soddisfatto, vincolo irrilevante

b) k è prima di j

- Se $Y_{kji} = 1$

$\underline{t_{ki} + s_{ki}} \leq t_{ji} + \Gamma(1 - Y_{jki}) \rightarrow t_{ki} + s_{ki} \leq t_{ji} + \Gamma 1 \rightarrow$ finisce k su i e prima di iniziare j aspetta Γ tempo

fine di k sulla macchina i

- Se $Y_{kji} = 0$

$t_{ki} + s_{ki} \leq t_{ji} + \cancel{\Gamma(1 - Y_{jki})}$ è sempre soddisfatto, vincolo irrilevante

Problema di assegnazione

È un problema formata da variabili binarie pure (come il **knapsack**). Si vogliono assegnare m compiti ad n persone ($m = n$), assegnazione bilanciata. Lo svolgimento del compito i da parte della persona j comporta un costo di esecuzione pari a c_{ij}.

Si differenzia dal problema di **matching** solo nella funzione obiettivo $\max \sum_{i}^{m} \sum_{i}^{n} c_{ij} x_{ij}$

- m compiti
- n: persone
- c_{ij}: costo di svolgimento del compito i da parte della persona j
- $x_{ij} \begin{cases} 1 \text{ Se il compito i viene assegnato alla persona j} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

- **Variabili:** $n \times m$
- **Vincoli**: $n + m$

$$\min \sum_{i}^{m} \sum_{i}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sa $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \rightarrow$ vincoli di tipo a | Ogni compito deve essere assegnato ad una e una sola persona
m vincoli -> 1 per ogni compito:
$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall j \rightarrow$ vincoli di tipo b | Ogni persona deve svolgere uno ed un solo compito
n vincoli -> 1 per ogni persona:
$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j$

- Il **vincolo di interezza delle variabili** può anche essere scritto nella forma $0 \leq x_{ij} \leq 1$, perchè in questa tipologia di problemi, anche se ammette valori frazionari scritto in questo modo, nell'**ottimo** sicuramente il **valore della variabile sarà intero.**
  - Se $m = n = 3$ → Ci sono 6 variabili in base (tante quanto i vincoli), ma 3 variabili sono ≠ 0 e altre 3 sono = 0 → soluzione **degenere**.

Estensioni del problema

Se $n \geq m$, i vincoli di impegno delle persone (**tipo a e b**) di formulano come **disuguaglianze.**
Esempio:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \rightarrow \text{Vincoli tipo a}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \rightarrow \text{Vincoli tipo b}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, \forall j$$

Perchè il vincolo di tipo **b** ci dice che ad ogni persona deve essere assegnato uno ed un solo compito, ma se ci sono più persone che compiti, qualcuna di queste rimarrà senza compiti.

Ottimizzazione su reti

Albero di supporto a costo minimo

- $G = (V, E)$ con V numero di nodi e E numero di archi
- $K = (V, T)$: generico albero di supporto
- $\mathcal{T}$: insieme degli alberi di supporto di G. Il numero degli insiemi di alberi di supporto è pari al massimo a n^{n-1}
- c_e: costo associato all'arco e (**grafo pesato** o **rete**)
- $\min_{k \in \mathcal{T}} c(K) = \sum_{e \in \mathcal{T}} c_e$
- $x_e = \begin{cases} 1 \text{ se l'arco e viene inserito nell'albero di supporto ottimo } K = (V, T) \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

- **Vincoli**: $1 + 2^n - 2$

Formulazione basata sui tagli

$C(U)$ sono gli insiemi degli archi di taglio

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$s.a \sum_{e \in E} x_e = \overbrace{n-1}^{\textbf{archi}} \quad (1)$$

1 solo vincolo

$$\sum_{e \in C(U)} x_e \geq 1 \ \forall U \subset V, U \neq 0 \quad (2)$$

$2^n - 2$ vincoli, dove n è il numero di nodi. Preso un qualunque sottoinsieme , il numero di archi scelti deve essere al massimo pari a $n-1$. Impongo che sia almeno un arco di taglio

$$x_e \in \{0,1\} \ \forall e \in E$$

Formulazione basata sull'eliminazione dei sottocicli

$E(U)$ sono gli insiemi degli archi che hanno entrambi gli estremi all'interno del sottoinsieme U

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

1 solo vincolo

$$s.a \bullet \sum_{e \in E} x_e = \overbrace{n-1}^{\textbf{archi}} \quad (1)$$

$2^n - 2$ vincoli, dove n è il numero di nodi. Impone che non si creino sotto cicli

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq card(U) - 1 \ \forall U \subset V, U \neq 0 \quad (2)$$

$$x_e \in \{0,1\} \ \forall e \in E$$

Problema di cammino minimo

Un cammino è una sequenza di archi incidenti

- $G = (V, E)$ dove V indica i nodi, E indica gli archi. $s \in V$: nodo origine, $t \in V$: nodo destinazione
- S : insieme dei cammini da s a t in G
- c_{ij}: costo per attraversare l'arco (i, j)
- $x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se l'arco (i,j) appartiene al cammino S} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$
- U sottoinsieme contenente i nodi

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{sa} \quad \overbrace{\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij}}^{\text{Archi uscenti da i}} - \overbrace{\sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki}}^{\text{archi che entrano in i}} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = s \\ -1 \text{ se i = t} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \quad \forall i \in V \quad (1)$$

$$\sum_{(i,j)\in E(U)} x_{ij} \leq card(U) - 1 \ \forall U \subset V, U \neq 0 \quad (2)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall (i, j) \in E$$

(1) Se $i = s$ → 1 nodo esce e 0 nodi entrano, siamo nel **nodo origine**

Se $i = t$ → 0 nodi entrano, 1 nodo esce, siamo nel **nodo finale**

Questo vincolo rappresenta i nodi appartenenti a V. Ci sono n equazioni, **1** per ogni nodo.

(2) Ci sono $2^k - 2$ equazioni. Questi vincoli sono trascurabili se $\nexists$ circuiti a costo totale negativo → altrimenti il problema sarebbe illimitato e quindi inutile nella realtà.

$c_{ij} > 0$

$c_{ij} < 0$ con grafico aciclico

Se non ho circuiti a **costo negativo nel grafo**, allora va bene il vincolo 1, altrimenti aggiungo un vincolo per evitare che io percorra il ciclo A.

Esempi reali: *pago per far usare il mio oleodotto, i nodi sono valute, gli archi il costo nel cambio delle valute, i pesi sono i moltiplicatori di Lagrange...*

Problema di flusso massimo

Dato un oleodotto con delle capacità sulle tratte, devo riuscire ad inviare la massima quantità dal nodo s al nodo t.

- n: numero di nodi
- m : numero di archi
- $G = (V, E)$ con $s \in V$: nodo d'origine, $t \in V$: nodo destinazione
- q_{ij}: capacità massima dell'arco (i, j)
- f_{ij}: unità di flusso da inviare lungo l'arco $(i, j) \in E$
  - C'è una variabile di questo tipo per ogni arco, m variabili
- v = flusso totale (massimo) che attraversa la rete dall'origine s alla destinazione t
  - C'è solo una variabile di questo tipo

- **Variabili**: $m + 1$
- **Vincoli**: $m + n$

$\max v$

$$s.a \sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in E} f_{ki} = \begin{cases} v & se\ i = s \\ -v & se\ i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall i \in V \quad \Big|\ n \text{ vincoli di bilancio}$$

$$0 \le f_{ij} \le q_{ij} \qquad \forall (i, j) \in E \quad \Big|\ m \text{ vincoli di capacità}$$

Problema di flusso a costo minimo

Ci sono delle raffinerie che hanno una richiesta che deve essere soddisfatta. I tratti hanno un costo.

- c_{ij}: costo unitario di trasferimento lungo l'arco (i, j)
- v_i è un valore parametrico fissato (è un dato)

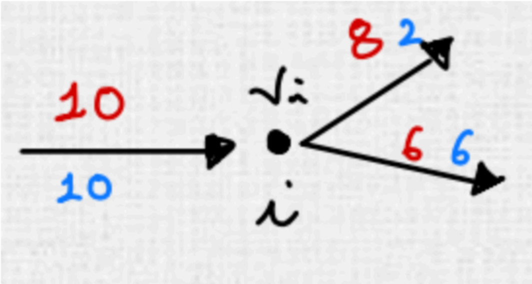
- **Variabili**: m
- **Vincoli**: $m + n$

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} f_{ij}$$

$$\text{sa} \quad \overbrace{\sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij}}^{\text{flussi uscenti}} - \overbrace{\sum_{k:(k,i)\in E} f_{ki}}^{\text{Flussi entranti}} = v_i \quad \forall i \in V \begin{cases} v_i > 0 \to \text{Nodo origine (produttore)} \\ v_i < 0 \to \text{Nodo destinazione} \end{cases}$$

$$m \text{ vincoli di capacità} \ \Big|\ 0 \le f_{ij} \le q_{ij} \qquad \forall (i, j) \in E$$

Esempio:



$\overbrace{8+6}^{\text{uscenti}} - \overbrace{10}^{\text{entranti}} = 4$, $v_i = 4, v_i > 0,$ nodo origine

$\overbrace{2+6}^{\text{uscenti}} - \overbrace{10}^{\text{entranti}} = -2$, $v_i = -2, v_i < 0,$ nodo destinazione

Condizioni di ammissibilità

$$\sum_{i=0}^{n} v_i = 0$$

Offerta dei nodi = richiesta dei nodi. Se la condizione di ammissibilità non dovesse essere rispettata, posso inventarmi dei nodi fittizi che come se fossero dei magazzini, ci permettono di far valere la condizione di ammissibilità.

Problema del taglio minimo, duale del problema del flusso max

Flusso massimo

$\max v + 0f_{ij}$

$$s.a \quad \sum_{j:(i;j)\in E} f_{ij} - \sum_{k:(k:i)\in E} f_{ki} - 1v = 0 \quad \text{se } i = s \qquad \lambda_s$$

$$\sum_{j:(i;j)\in E} f_{ij} - \sum_{k:(k:i)\in E} f_{ki} + 1v = 0 \quad \text{se } i = t \qquad \lambda_t$$

$$\sum_{j:(i;j)\in E} f_{ij} - \sum_{k:(k:i)\in E} f_{ki} + 0v = 0 \quad \text{altrimenti} \qquad \lambda_i$$

$$0 \le f_{ij} \le q_{ij} + 0v \quad \forall (i,j) \in E \to \mu_{ij}$$

v è libera in segno

Duale: Taglio minimo

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } (i;j) \in E : i \in U, j \in (V-U) \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$ -

$$\lambda_j = \begin{cases} 0 \text{ se } j \in U \to \text{ Stesso sottoinsieme di S} \\ 1 \text{ altrimenti} \to \text{ Stesso sottoinsieme di } t \to j \in (U-V) \end{cases}$$ -

q_{ij} è la capacità dell'arco $(i;j)$ -

$$\min \sum_{(i;j)\in E} q_{ij}\mu_{ij}$$

I tagli non $s-t$ non rispettano questo vincolo. È soddisfatto se e solo se $s \in U$ e il taglio è $s-t$ (separa il nodo s dal nodo t) | $s.a \quad -\lambda_S + \lambda_t = 1 \to v$

Il vincolo è inattivo solo per **archi inversi del taglio** | $\lambda_i - \lambda_j + \mu_{ij} \ge 0 \quad \forall (i,j) \in E \to f_{ij}$

λ_i libere, $\mu_{ij} \ge 0 \quad \forall (i,j) \in E$

Problema del commesso viaggiatore

- **Circuito Euleriano**: passo una e una sola volta per ogni arco del grafo
- **Circuito Hamiltoniano**: passo una e una sola volta per tutti i nodi del grafo

- $G = (V, E)$
- H: generico circuito **hamiltoniano**
- c_e: lunghezza/costo/tempo associato all'arco e (da minimizzare)
  - c del circuito = $\sum c_e$ degli archi
- $x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se l'arco (i;j) appartiene al circuito H ottimale} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

Vincoli: $2^n - 2$

Formulazione basata sui tagli

$$\min \sum_{(i;j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a \sum_{j;(i;j)\in E} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad \text{archi uscenti da } i$$

$$\sum_{j;(i;j)\in E} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in V \quad \text{archi entranti in } i$$

$$\sum_{i\in U, j\notin U} x_{ij} \geq 1 \quad \forall U \subset V, U \neq \emptyset$$

È un vincolo di connessione, impone che i nodi debbano essere tutti connessi (esiste sempre un arco del taglio)

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad \forall (i; j) \in E$$

Formulazione basata sull'eliminazione dei sottocicli

$$\min \sum_{(i;j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a \sum_{j;(i;j)\in E} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad \text{archi uscenti da } i$$

Analogo a $\sum_{i:(i;j)\in E} x_{ij} = 1 \quad \forall j$

$$\sum_{j;(i;j)\in E} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in V \quad \text{archi entranti in } i$$

Evita la creazione dei sottocicli, impone che devono esserci tanti archi quanti i nodi - 1

$$\sum_{(i,j)\in E(U)} x_{ij} \leq card(U) - 1 \quad \forall U \subset V, U \neq \emptyset$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad \forall (i; j) \in E$$

Project Management

Si fa riferimento ai digrafi di tipo **AON**

Ottimizzazione a risorse illimitate: Tempificazione

L'obiettivo è determinate gli istanti di inizio svolgimento di ciascuna attività, rispettando le relazioni di precedenza, in modo da **rendere minima la durata dell'intero progetto**.

- d_i è la durata dell'attività $i \in V$
- T_i: istante di inizio dell'attività $i \in V \rightarrow$ una variabile per ogni attività
- D: istante di conclusione dell'intero progetto (durata): $\rightarrow$ una sola variabile

- **Variabili** $n+1$ dove n è il numero di attività

$\min D$

$s.a \quad T_n + d_n \leq D$ | Il progetto è finito quando finisce l'ultima attività

$T_i + d_i \leq T_j \qquad (i,j) \in E$ | Esiste un vincolo di questo tipo per ogni **precedenza**. Indica che l'attività i deve essere finita prima che inizi l'attività j

$T_i \geq 0, D \geq 0 \quad i \in V$

Ottimizzazione a risorse illimitate: bilanciamento tempi - costi

Posso modificare la durata dell'attività a seconda delle risorse che dedico all'attività. Non ha senso velocizzare un'attività non critica. Devo stare attento.

- d_i è la durata dell'attività $i \in V$
- g_i: è la durata **crash** dell'attività $i \in V$ durata minima dell'attività con risorse aggiuntive)
- c_i: costo standard dell'attività $i \in V$
- q_i: costo crash dell'attività i
- $w_i = \left| \dfrac{q_i - c_i}{g_i - d_i} \right|$ è quanto spendo per accelerare
- y_i riduzione della durata dell'attività $i \in V$, indica di quanti giorni accelero
- g_i: è la durata **minima possibile**

- **durata - accelerazione** = $d_i - y_i$ = **durata effettiva**

$$\min \sum_{i \in V} w_i y_i$$

$$s.a \quad T_n + (d_n - y_i) \leq B$$

$$T_i + (d_i - y_i) \leq T_j \qquad (i,j) \in E$$

$$y_i \leq d_i - g_i$$

$$T_i \geq 0, y_i \geq 0 \quad i \in V$$

Ottimizzazione a risorse limitate

Determinare la collocazione temporale delle attività (istanti di inizio), in modo da rendere minima la durata dell'intero progetto, rispettando le relazioni di precedenza e senza violare i **vincoli di capacità relativi alle risorse disponibili**.

- d_i: la durata dell'attività $i \in V$
- W_{kt}: la quantità di risorsa k disponibile nel periodo t
- w_{ikh}: l'assorbimento di risorsa k nel periodo h (periodo di svolgimento dell'attività), di esecuzione dell'attività $i \in V$
- B limitazione superiore alla durata del progetto (upper bound)
- T_i: istante di inizio dell'attività $i \in V$
- D: istante di conclusione dell'intero progetto (durata)
- $x_{it} = \begin{cases} 1 \text{ Se l'attività i viene iniziata nel periodo t} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

- **Variabili**: tante quante le attività e i periodi

$$\min D$$

$$s.a\ T_n + d_n \leq D$$

$$T_i + d_i \leq T_j \quad \forall (i,j) \in E$$

È un vincolo di precedenza per ogni arco

$$\sum_{t=1}^{B} x_{it} = 1 \quad \forall i \in V$$

È un vincolo per ogni attività (nodo), il quale impone che l'attività i inizi una sola volta in tutto il progetto

$$\boxed{T_i = \sum_{t=1}^{B} t x_{it} \quad \forall i \in V}$$

È un vincolo per ogni attività (nodo). Lega il periodo in cui inizia l'attività, definito dalla variabile x, con T. Lega l'istante d'inizio (T) dell'attività i con le variabili x

$$\boxed{\sum_{i \in V} \sum_{h=t-d_i+1}^{t} w_{ik(t-h+1)} x_{ih} \leq W_{kt} \quad \forall k, \forall t}$$

È un vincolo di assorbimento di risorse, è un vincolo per ogni risorsa e per ogni periodo

$$T_i \geq 0, D \geq 0, x_{it} \in \{0,1\} \quad \forall t, i \in V$$

$T_i = \sum_{t=1}^{B} t x_{it} \quad \forall i \in V$ → è un vincolo per ogni attività (nodo). Lega il periodo in cui inizia l'attività, definito dalla variabile x, con T. In altre parole lega l'istante di inizio (T) dell'attività i con le variabili x.

i comincia in 3

$T_i = 3$

$x_{i3} = 1$

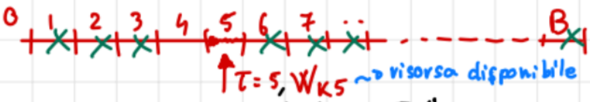
$x_{i1}, x_{i2}, \dots = 0$

Vincolo 4:

$$3 = 1 \cdot \cancel{x_{i1}}^{0} + 2\cancel{x_{i2}}^{0} + \underbrace{3x_{i3}}_{3 \cdot 1} + 4\cancel{x_{i4}} + \dots$$

Supponiamo di voler controllare l'assorbimento di risorse nel periodo 5

VINCOLO 5 ->



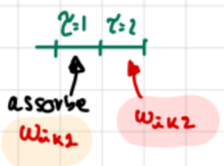
Supponiamo di voler controllare l'assorbimento di risorse nel periodo 5

sommatoria sulle attività (sono sui nodi V)

$$\sum_{i\in V}\underbrace{\sum_{h=\tau-d_i+1}^{\tau} w_{ik(\tau-h+1)}x_{ih}}_{\text{q.tà di risorsa che la singola attività assorbe in quel periodo.}} \le W_{k\tau}$$

Risorsa usata — Risorsa disponibile

attività i dura 2 period.



- Se i inizia in 1, dura 2 periodi, quindi finisce in 2, non consuma risorse nel periodo 5 che sto analizzando → **non è un'attività rilevante per controllare l'assorbimento di risorse**.
- Se i inizia in 4, dura 2 periodi, quindi finisce in 5, allora consuma risorse nel periodo 5
- Se i inizia in 5, dura 2 periodi, finisce in 6, quindi consuma risorse nel periodo 5.
- Se i inizia in 6, dura 2 periodi, quindi finisce in 7, non consuma risorse nel periodo 5 che sto analizzando → **non è un'attività rilevante per controllare l'assorbimento di risorse**

In conclusione per la verifica di capacità in 5, m interessa solo se l'attività i è iniziata in 4 o in 5.

Nel nostro caso il vincolo diventa: $$¢

- h: assume i valori di 4 e 5, che sono proprio i valori di i per i quali consumo risorse in 5.

Controllo di tanti periodi quanti al $\max$ mi servono per far si che l'attività sia ancora in corso nel periodo che considero

$$\sum_{h=5-2+1}^{5}(\dots) = \underbrace{w_{ik(5-4+1)}\overset{0\ 1}{x_{i4}}}_{h=4} + \underbrace{w_{ik(5-5+1)}\overset{1\ 0}{x_{i5}}}_{k=5} = w_{ik2}x_{i4} + w_{ik1}x_{i5}$$

periodo (h = 4) durata di i

a) i inizia in 4 → $w_{ik2}\cdot 1 + w_{ik1}\cdot 0 = w_{ik2}$ — quantità di risorse che i assorbe in 5

b) i inizia in 5 → $w_{ik2}\cdot 0 + w_{ik1}\cdot 1 = w_{ik1}$

Devo ripetere questo processo per tutti gli altri periodi e per le altre attività. Non considero nessun periodo oltre il periodo $t = 5$. Sempre una delle due binarie vale 1. Il compito della sommatoria è quello di armonizzare le due scale (durate dell'attività e durata del progetto).

Mi dice a cosa corrisponde in termini di τ (periodo di attività), il periodo $t = 5$ che considero. In questo caso sappiamo se il periodo 5 è il primo o il secondo periodo dell'attività in funzione del valore di x.

Non c'è un unico vincolo di forzatura nel modello, ma questa è data da un insieme di vincoli, in particolare il vincolo 4 forza una binaria a valore 1, il vincolo 3 invece forza le altre binarie a 0.

Analisi decisionale

Strategie miste

È un gioco al quale assegnamo una probabilità di giocata ad ognuna delle strategie. Prendiamo in considerazione un **gioco a somma nulla** a due giocatori.

Abbiamo la perdita attesa di 1 (**minimizzare**) e il guadagno atteso di 2 (**massimizzare**).

Prospettiva di 1

- U**:** matrice delle utilità (perdite di 1 = vincite di 2)
- x : distribuzione di **probabilità** con uni 1 gioca una strategia j e 2 gioca i
- Strategie di 1: $\mathcal{S}_1 = \mathcal{P} = \{1,2,\dots,p\} \rightarrow$ scelta K: variabile casuale
- Strategie di 2: $\mathcal{S}_2 = \mathcal{Q} = \{1,2,\dots,q\} \rightarrow$ scelta H: variabile casuale
- Strategie miste di 1: vettore x con $x_j = Pr(K=j) \quad j \in P \;\; [x_1, x_2, \dots] = [0.4, 0.6, \dots]$
- Strategie miste di 2: vettore λ con $\lambda_i = Pr(H=i) \quad i \in Q \quad [\lambda_1, \lambda_2, \dots]$

$\min\limits_{x}\{\max\limits_{i \in \mathcal{Q}}(U'x)_i : 1'x = 1, x \geq 0\} = z^*$ | $1'x \rightarrow \sum x = 1$, sono probabilità, $(U'x)_i \rightarrow$ funzione di utilità

$\min g$ | Maggiorante da minimizzare

sa $U'x \leq g1$
$1'x = 1$
$x \geq 0$

Prospettiva di 2

$1'\lambda \rightarrow \sum \lambda = 1$, sono probabilità, $(U'\lambda)_j \rightarrow$ funzione di utilità | $\max\limits_{\lambda}\{\min\limits_{j \in \mathcal{P}}(U'\lambda)_j : 1'\lambda = 1, \lambda \geq 0\} = d^*$

Minorante da massimizzare | $\max t$

sa $U'\lambda \leq t1$

$1'\lambda = 1$
$\lambda \geq 0$

Coppia Primale e Duale

Il problema ha sempre soluzione ottima d^* e z^*

Il problema non è inammissibile:

Il problema non è illimitato: $T \leq U\lambda$

💡 → ∃ Equilibrio di Nash

P1 $\bar{x}, g$

$$\begin{aligned} \min \;& g \\ s.a \;& U'x \leq g1 \\ & 1'x = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

⇩

$$\begin{aligned} \min \;& g + 0\bar{x} \\ s.a \;& -U'x + g1 \geq 0 \quad (\lambda) \\ & 1'x \overset{+0g}{=} 1 \quad (\tau) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

vettore : $0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 \dots$

g é libera

P2 $\bar{\lambda}, \tau$

$$\begin{aligned} \max \;& t \\ s.a \;& U\lambda \geq t1 \\ & 1'\lambda = 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$f(\lambda_1) \geq \tau$
$f(\lambda_2) \geq \tau$
$f(\lambda_q) \geq \tau$

⇩

$$\begin{aligned} \max \;& t \\ s.a \;& -U\lambda + t1 \leq 0 \quad (x) \\ & 1'\lambda = 1 \quad (g) \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

τ é libera

$\boxed{\rightarrow \text{Coppia di problemi primale e duale: } z^* = d^*}$

> In un problema a strategie miste, non c'è nessun vantaggio a conoscere prima la strategia dell'avversario → **dualità forte**.