Teoremi e Dimostrazioni

Teorema di Fermat (*)

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad P_0 = (x_0, y_0) \in A$

Se P_0 è un punto di **massimo** o di **minimo** di f in $A \Rightarrow$ o è un *punto stazionario, o è un punto di non derivabilità o è un punto di frontiera*.

> 📌 Esso stabilisce che **se una funzione è differenziabile in un punto interno al dominio**, e se tale punto è di massimo o di minimo relativo, allora il **gradiente della funzione è nullo**.

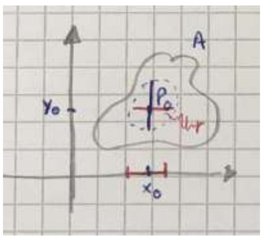
Punto stazionario

Se P_0 è un punto di **massimo** o di **minimo** di f in A e se f è **derivabile** in P_0 e P_0 è un punto **interno** di A, allora le derivate parziali di P_0 in f sono entrambi **uguali a** 0 (**punto stazionario**).

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad P_0 = (x_0, y_0) \in A$ è un **punto stazionario** di f se f è **derivabile** in P_0 e $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$.

> 📌 Se f è differenziabile in P_0 e P_0 è un punto stazionario $\Rightarrow$ l'equazione del piano tangente al grafico di f in P_0 è $z = f(x_0, y_0)$ → il **piano tangente è orizzontale**.

▼ Dimostrazione



Supponiamo che P_0 sia un punto di **massimo relativo** di f in A → $\exists\, \mathcal{U}(P_0) \subseteq A$ tale che $\forall (x, y) \in \mathcal{U} \Rightarrow f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.

In particolare $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall x \in (x_0 - r; x_0 + r)$ dove r è il **raggio dell'intorno**.

Sia $g(x) = f(x, y_0) \quad g(x_0) = f(x_0, y_0) \Rightarrow g(x) \leq g(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - r; x_0 + r)$

Quindi $g(x_0)$ è una funzione di una variabile → x_0 è un punto di massimo relativo di g

g è derivabile in x_0 perché per ipotesi f è derivabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow g'(x_0) = 0$

$g'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$

Analogamente $f(x_0, y)$ → sono i punti sulla verticale dell'intorno →

$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall y \in (y_0 - r; y_0 + r) \ldots \Rightarrow f_y(x_0, y_0) = 0$

Teorema (*) Condizione sufficiente per estremi liberi

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad A$ aperto $\quad f \in \mathcal{C}^2(A) \quad P_0 = (x_0, y_0)$ punto stazionario di f.

- Allora se $d^2 f(P_0)$ è **definita positiva** si ha che P_0 è un punto di **minimo relativo**
- Se $d^2 f(P_0)$ è **definita negativa** si ha che P_0 è un punto di **massimo relativo**
- Se $d^2 f(P_0)$ è **indefinita**, P_0 è un punto di **sella della funzione** f.

Non ci dice nulla se $d^2 f(P_0)$è semidefinita.

▼ Dimostrazione

$$\Delta f \to f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2\right) + o((x - x$$

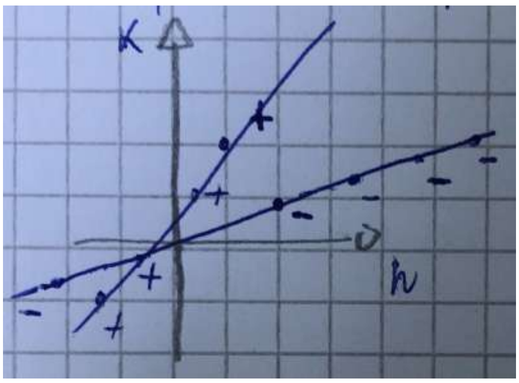
Poniamo $h = x - x_0 \qquad k = y - y_0$

$$\Delta f \to f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2\right) + o(h^2 + k^2)$$

$o(h^2 + k^2)$ è un infinitesimo di ordine superiore che tende a 0 più velocemente di h^2, k^2, ma non conosciamo il suo segno, quindi in un intorno ≠ (0,0) non sappiamo quanto grande può essere

📌 Il segno di Δf coincide con il segno di $d^2 f(P_0)$ per $(h, k) \in \mathcal{U}(0, 0)$, perchè $o(h^2 + k^2)$ è trascurabile in un intorno dell'origine

- Se $d^2 f(P_0)$ è **definita positiva** si ha che $\Delta f \geq 0 \quad \forall (h, k) \in \mathcal{U}(0, 0)$ → P_0 è un punto di **minimo relativo.**
- Se $d^2 f(P_0)$ è **definita negativa** si ha che $\Delta f \leq 0 \quad \forall (h, k) \in \mathcal{U}(0, 0)$ → P_0 è un punto di **massimo relativo**.
- Se $d^2 f(P_0)$ è **indefinita** vuol dire che è sia positiva che negativa in $\mathcal{U}(0, 0)$. Siccome Δf cambia di segno in ogni intorno dell'origine $\mathcal{U}(0, 0)$ → P_0 è un **punto di sella**



Criterio della matrice Hessiana (*) in due variabili

📌 Il **criterio della matrice Hessiana**, *vale solo in due variabili* (non vale in n variabili)

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad A$ aperto $\quad f \in \mathcal{C}^2(A) \quad P_0 = (x_0, y_0) \in A$ punto stazionario di f

- Se $\det Hf(P_0) > 0$ e $f_{xx}(P_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un punto di **minimo relativo**
- Se $\det Hf(P_0) > 0$ e $f_{xx}(P_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un punto di **massimo relativo**

> 📌 Se $\det Hf(P_0) > 0$, $f_{xx}(P_0)$ non sarà mai = 0, sarà sempre diverso da 0

- Se $\det Hf(P_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un punto di **sella**.
- Se $\det Hf(P_0) = 0 \Rightarrow$ Non abbiamo informazioni, dobbiamo utilizzare la definizione per stabilire la natura.

▼ Dimostrazione

$P_0 = x_0, y_0$

Partendo dalla formula di Taylor al secondo ordine con centro in (x_0, y_0)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(P_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(P_0)(y-y_0)^2\right) + o((x-x_0)^2 + ($$

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

$$\Delta f \to f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(P_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(P_0)(y-y_0)^2\right) + o((x-$$

Poniamo $h = x - x_0 \qquad k = y - y_0$

$$\Delta f \to f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2\right) + o(h^2+k^2)$$
$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}d^2 f(x_0,y_0) + o(h^2+k^2)$$

$o(h^2+k^2)$ è un infinitesimo di ordine superiore che tende a 0 più velocemente di h^2, k^2, ma non conosciamo il suo segno, quindi in un intorno ≠ (0,0) non sappiamo quanto grande può essere

> 📌 Il segno di Δf coincide con il segno di $d^2 f(P_0)$ per $(h,k) \in \mathcal{U}(0,0)$, perchè $o(h^2+k^2)$ è trascurabile in un intorno dell'origine

$d^2 f(x_0,y_0)$ è una forma quadratica con matrice $Hf(x_0,y_0)$

Se $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ gli autovalori di $Hf(x_0,y_0)$ sono entrambi > 0

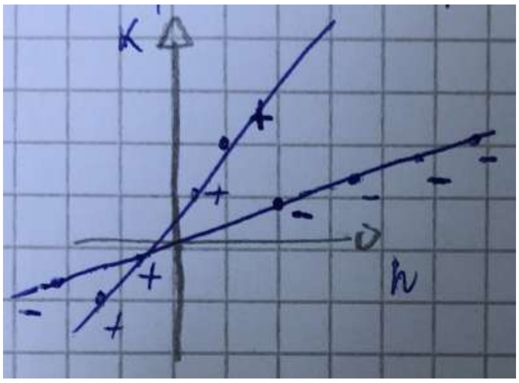
- $d^2 f(P_0)$ è **definita positiva** si ha che $\Delta f > 0 \quad \forall (h,k) \in \mathcal{U}(0,0)$ → P_0 è un punto di **minimo relativo.**

Se $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ gli autovalori di $Hf(x_0,y_0)$ sono entrambi < 0

- $d^2 f(P_0)$ è **definita negativa** si ha che $\Delta f \leq 0 \quad \forall (h,k) \in \mathcal{U}(0,0)$ → P_0 è un punto di **massimo relativo**.

Se $\det Hf(x_0,y_0) < 0$, gli autovalori sono discordi

- $d^2 f(P_0)$ è **indefinita** vuol dire che è sia positiva che negativa in $\mathcal{U}(0,0)$. Siccome Δf cambia di segno in ogni intorno dell'origine $\mathcal{U}(0,0)$ → P_0 è un **punto di sella**

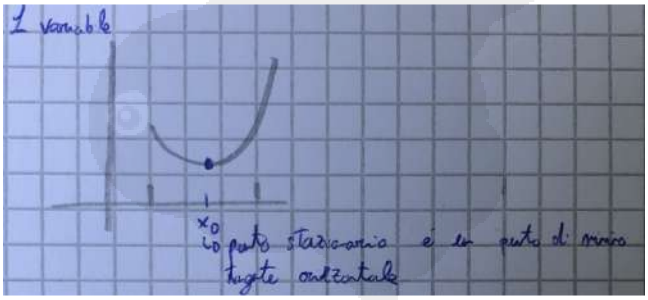


Se $\det Hf(x_0, y_0) = 0$, almeno un autovalore è nullo

- $d^2f(P_0)$ è una forma quadratica semidefinita positiva (o semi definita negativa), cioè è sempre **positiva** tranne che in un punto, diverso da 0, nella quale si annulla e quindi si annulla su tutta la retta passante per quel punto.
- Siccome il segno di $\Delta f(x_0, y_0) =$ segno $d^2f(x_0, y_0)$, ma $d^2f(x_0, y_0) = 0$, allora il segno $\Delta f(x_0, y_0) =$ segno $o(h^2 + k^2)$ che non conosciamo. Per questo motivo non possiamo dire nulla sulla natura del punto se il $\det Hf(x_0, y_0) = 0$.

Teorema (*) ottimizzazione di funzioni convesse

▼ In 1 variabile



$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se f è derivabile 2 volte in (a, b) e se $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, allora la f è **convessa** in (a, b) e viceversa.

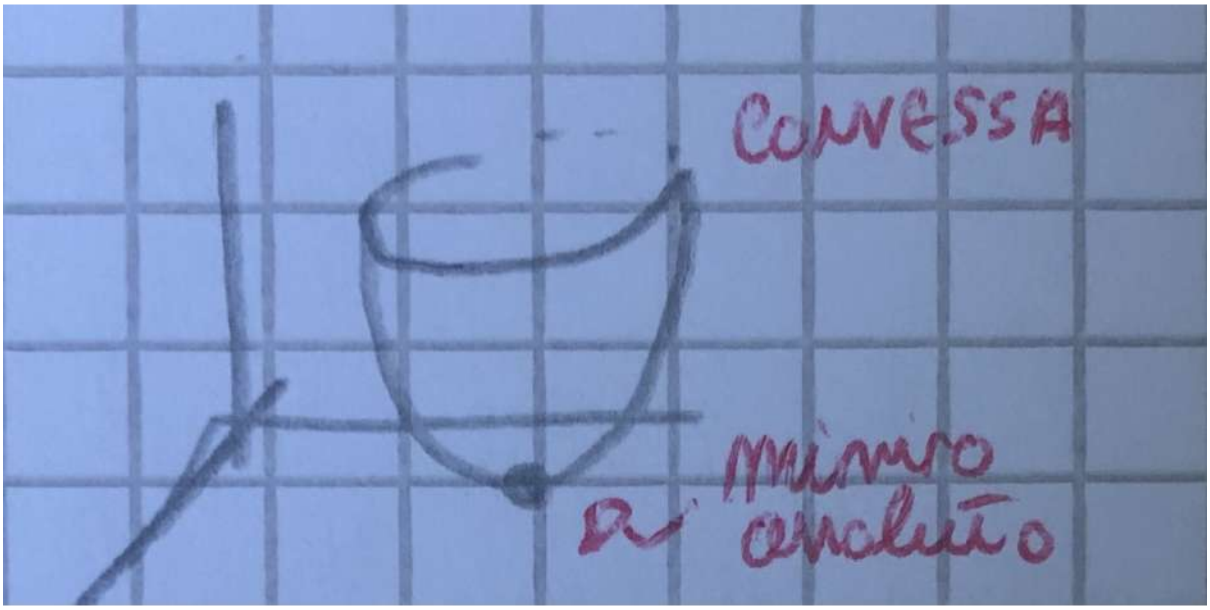
$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ è convessa}$$
$$f \text{ è convessa} \Rightarrow f''(x) \geq 0$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f \text{ è convessa}$$

$$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow f \text{ è concava}$$

In 2 variabili

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad A$ aperto, A convesso



- f differenziabile in A, f **convessa** in A, (x_0, y_0) punto stazionario $\Rightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di **minimo assoluto** di f in A.
- f differenziabile in A, f **concava** in A, (x_0, y_0) punto stazionario $\Rightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di **massimo assoluto** di f in A.

▼ Dimostrazione

Per il teorema precedente si ha che

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) + \cancel{f_x(x_0, y_0)(x - x_0)} + \cancel{f_y(x_0, y_0)(y - y_0)} \quad \forall (x,y) \in A$$
$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) \geq f(x_0, y_0)} \quad \forall (x,y) \in A$$

$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \Rightarrow$ è la definizione di punto di **minimo assoluto**.

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ A aperto, A convesso, $f \in \mathcal{C}^2(A)$ ← vale il teorema di Schwarz

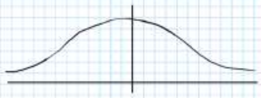
$$d^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$$

- f è **convessa** in A se e solo se $\forall (x_0, y_0) \in A \quad d^2 f(x_0, y_0) \geq 0 \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$
  - La forma quadratica $d^2 f(x_o, y_0)$ è **definita positiva o anche semidefinita positiva**
- f è **concava** in A se e solo se $\forall (x_0, y_0) \in A \quad d^2 f(x_0, y_0) \leq 0 \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$
  - La forma quadratica $d^2 f(x_o, y_0)$ è **definita negativa o anche semidefinita negativa**

Integrale della Gaussiana (*) con dimostrazione

* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}$

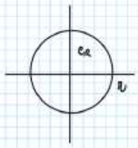
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 1$



DIMOSTRAZIONE:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

→ Cambio il dominio di integrazione e utilizzo il teorema del cambio di variabili



$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$

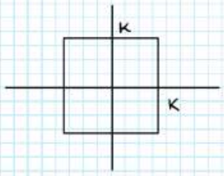
$0 \le \rho \le r$
$0 \le \theta \le 2\pi$

↳ È un integrale improprio
L'insieme d'integrazione $\mathbb{R}^2$ è illimitato

$$= \lim_{r\to+\infty} \iint_{C_R} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy \Rightarrow \lim_{r\to+\infty} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\right)d\theta$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\right]_0^r d\theta \Rightarrow \lim_{r\to+\infty} \int_0^{2\pi} -e^{-\frac{1}{2}r^2}+1\,d\theta \Rightarrow \lim_{r\to+\infty}\left(\underbrace{-e^{-\frac{1}{2}r^2}}_{\to 0}+1\right)2\pi = 2\pi$$

Quindi sappiamo che $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 2\pi$



A questo punto integriamo su un dominio di integrazione quadrato

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K}\left(\int_{-K}^{K} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\right)dx$$

$$\Rightarrow \lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K}\left(\int_{-K}^{K} e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\right)dx \Rightarrow \lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy \cdot \int_{-K}^{K} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

Il limite del prodotto è il prodotto dei limiti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\right)^2 = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi} \quad *$$

In maniera rapida: $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\right)^2 = 2\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi} \quad *$$

Struttura dell'integrale generale - Formula risolutiva (*)

Se p e q sono continue in $I \Rightarrow p(x)$ ha primitiva in I. Sia $P(x)$ la **primitiva** di $p(x)$

📌 $F(x) = \frac{x^2}{2}$ è primitiva di $f(x) = x \to F(x) = \int f(x)$

- Se $y' + yp(x) = q(x)$

  Allora la formula risolutiva è:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + c\right)$$

- Se $y' = yp(x) + q(x)$

  Allora la formula risolutiva è:

$$y = e^{\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx + c \right)$$

▼ Dimostrazione

$$\begin{gathered} y' + yp(x) = q(x) \Rightarrow [y' + yp(x)]e^{P(x)} = q(x)e^{P(x)} \\ \underbrace{y'e^{P(x)} + yP(x)e^{P(x)}} = q(x)e^{P(x)} \\ \left(y(x)e^{P(x)}\right)' = q(x)e^{P(x)} \end{gathered}$$

> $y'e^{P(x)} + yP(x)e^{P(x)}$ è la derivata di $y(x)e^{P(x)}$

$$\Rightarrow y(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}dx$$

📌 Dove gli integrali, in questo caso, rappresentano solo **una primitiva**, non l'insieme di tutte le primitive.

Dividiamo tutto per $e^{P(x)}$, che equivale a moltiplicare per $e^{-P(x)}$

$$y(x) = e^{-P(x)} \left(\int q(x)e^{P(x)}dx + c \right)$$

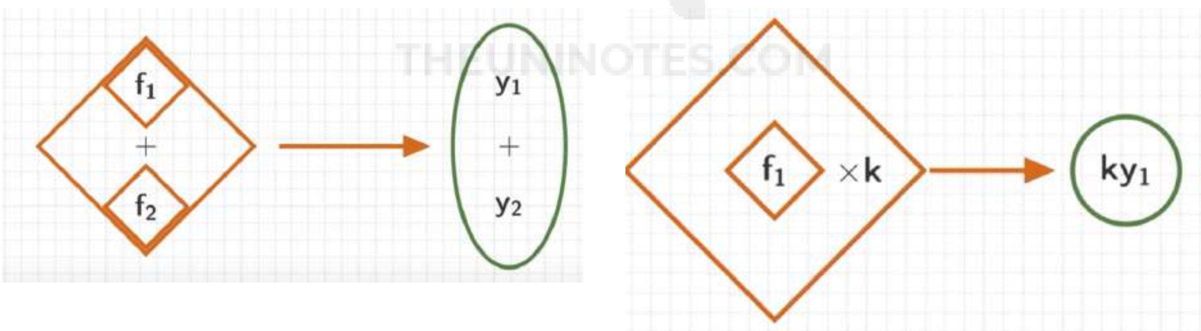
Siccome $P(x)$ è una primitiva di $p(x)$, aggiungiamo l'integrale e scriviamo $p(x)$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \right)$$

→ Formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del 1° ordine

---

Principio di sovrapposizione (*)



Quindi in generale: **Dimostrazione 1**

$$\begin{gathered} y_1 \to (Ly_1 = f_1)c_1 \\ + \\ y_2 \to (Ly_2 = f_2)c_2 \\ \Rightarrow \boxed{c_1Ly_1 + c_2Ly_2 = c_1f_1 + c_2f_2} \\ \Rightarrow L\underbrace{(c_1y_1 + c_2y_2)} = c_1f_1 + c_2f_2 \\ \Rightarrow L(y) = c_1f_1 + c_2f_2 \end{gathered}$$

$L(y)$ soddisfa l'equazione differenziale con forzante $c_1f_1 + c_2f_2$

Dimostrazione 2

$$
\begin{aligned}
&a(x)(y_1'' + y_2'') + b(x)(y_1' + y_2') + c(x)(y_1 + y_2) \\
&= \boxed{a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1} + \boxed{a(x)y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2} = f(x) + g(x)
\end{aligned}
$$

Teorema 1 (principio di sovrapposizione) (*)

Se y_1 è **soluzione** di $ay'' + by' + cy = f_1$ (forzante f_1) e

y_2 è **soluzione** di $ay'' + by' + cy = f_2$ (forzante f_2)

→ allora la funzione $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ è **soluzione** di $ay'' + by' + cy = c_1 f_1 + c_2 f_2$

Struttura dell'integrale generale quando $f(t) = 0$ (termine noto = 0)

$$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow Ly = 0$$

y_1 è **soluzione dell'equazione omogenea** $Ly_1 = 0$

y_2 è **soluzione dell'equazione omogenea** $Ly_2 = 0$

Allora per il principio di sovrapposizione

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{L(c_1 y_1 + c_2 y_2)}_{L(y)=0} = c_1 L y_1 + c_2 L y_2 = 0 \\
&\Rightarrow L(y) = 0 \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Quinid ogni combinazione lineare dell'equazione omogenea, è ancora soluzione della stessa equazione.

📌 ⇒ L'insieme **S** delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea **forma uno spazio vettoriale di dimensione pari all'ordine dell'equazione differenziale**.

Se $a(t) \neq 0$, quindi l'equazione è di ordine 2, allora anche la dimensione dello spazio vettoriale **S** è 2.

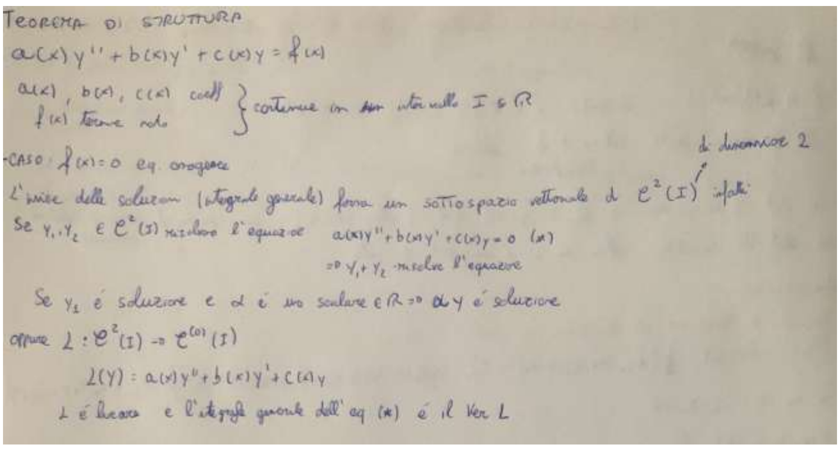
Teorema 2 (di struttura) (*)

L'integrale generale $ay'' + by' + cy = 0$ e $a, b, c, f(forzante)$ funzioni continue in un intervallo I, $a(t) \neq 0 \; in \; I$, è dato da tutte le combinazioni lineari:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dove y_1, y_2 sono due **soluzioni linearmente indipendenti** dell'equazione stessa.

▼ Dimostrazione


Teorema di struttura
$a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = f(x)$
$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ coeff } continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$
$f(x)$ termine noto
caso: $f(x) = 0$ eq. omogenea
L'insieme delle soluzioni (integrale generale) forma un sottospazio vettoriale di $C^2(I)$ di dimensione 2 infatti
Se $y_1, y_2 \in C^2(I)$ risolvono l'equazione $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ (*)
$\Rightarrow y_1 + y_2$ risolve l'equazione
Se y_1 è soluzione e α è uno scalare $\in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha y$ è soluzione
oppure $L : C^2(I) \to C^0(I)$
$L(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$
L è lineare e l'integrale generale dell'eq (*) è il Ker L

Struttura dell'integrale generale quando $f(t) \neq 0$ (termine noto ≠ 0)

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \qquad f \neq 0$$

$\Rightarrow Ly = a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y$

$\Rightarrow Ly = f$ ← **equazione non omogenea o equazione completa**

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \leftarrow \text{equazione omogenea associata}$$
$$Ly = 0$$

Supponiamo che:

- y_0 è **soluzione dell'equazione omogenea associata** $Ly_0 = 0$
- y_p è **soluzione dell'equazione completa** $Ly_p = f$

Per il principio di sovrapposizione:

$$L(y_0 + y_p) = Ly_0 + Ly_p = 0 + f = f$$

y_p è una soluzione di $Ly = f$

→ $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$ sono le soluzioni di $Ly = f$

y_0 è una soluzione di $Ly = 0$

Se invece:

- y_1 è **soluzione dell'equazione completa** $Ly_1 = f$
- y_2 è **soluzione dell'equazione completa** $Ly_2 = f$

Per il principio di sovrapposizione:

$$L(y_1 - y_2) = Ly_1 + Ly_2 = f - f = 0$$

É soluzione dell'equazione omogenea associata.

Teorema 3 (di struttura per le equazioni complete) (*)

L'integrale generale di

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \qquad f \neq 0$$

- $a, b, c, f(forzante)$ funzioni continue in un intervallo I, $a \neq 0$,

è dato da tutte e sole le funzioni:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dove y_1 e y_2 sono due **soluzioni linearmente indipendenti** dell'equazione omogenea associata $a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0$ → sono soluzioni di $Ly = 0$

E y_p è una **soluzione particolare** dell'equazione completa $a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = f(t)$

▼ Dimostrazione

- CASO eq. complete

$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=f(x) \longrightarrow S$ integrale generale

eq. omogenea associata: $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0 \longrightarrow S_0$ integrale generale

$S=S_0+\bar{y}$ $\qquad$ $\bar{y}$ soluzione particolare dell'eq. completa.

infatti se $y \in S_0$ e $\bar{y} \in S \Rightarrow y+\bar{y} \in S$

infatti $L(y+\bar{y})=L(y)+L(\bar{y})=0+f$

oppure $a(x)(y+\bar{y})''+b(x)(y+\bar{y})'+c(x)(y+\bar{y})$

$=a(x)y''+a(x)\bar{y}''+b(x)y'+b(x)\bar{y}'+c(x)y+c(x)\bar{y} = 0 + f(x)$

allora $S_0+\bar{y} \subseteq S$

ma anche $S \subseteq S_0+\bar{y}$ infatti se $y \in S$ (soluzione dell'eq. completa)

$y-\bar{y} \in S_0$ perché $L(y-\bar{y})=L(y)-L(\bar{y})=f-f=0$

$y \in S_0+\bar{y}$

$\Rightarrow$ Se y_1 e y_2 sono 2 soluzioni lin. indipendenti dell'eq. omogenea (sono una base) $\Rightarrow$ ogni soluzione è loro combinazione lineare

$S_0=\{y \in C^2(I) : y=c_1y_1+c_2y_2\}$

$S=S_0+\bar{y}=\{y \in C^2(I) : y=c_1y_1+c_2y_2+\bar{y}\}$ $\bar{y} \in S$

Equazione caratteristica associata (*)

Caso $\Delta > 0$

1. Cerchiamo soluzioni del tipo $y(t) = e^{\lambda t}$ dove λ è un parametro da determinare, con queste derivate:

   $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

   $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

2. Sostituiamo nell'equazione differenziale $ay'' + by' + cy = 0$ e raccogliamo $e^{\lambda t}$

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$$
$$e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$
$$\cancel{e^{\lambda t}}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0$$

   $y(t)$ è soluzione se e solo se $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

   $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \leftarrow$ **polinomio caratteristico associato** all'equazione differenziale.

3. Risolviamo l'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

   Se $\Delta > 0$, il polinomio caratteristico ammette due radici reali distinte:

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$
$$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

Le funzioni y_1 e y_2 non sono mai costanti, infatti il loro rapporto è $\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \frac{e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_2 t}} = e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$ che dipende da t → $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

4. Dal teorema di struttura possiamo scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Come combinazione di y_1 e y_2 al variare delle costanti c_1, c_2.

▼ Dimostrazione: Integrale generale di $y'' + 4y' + 3y = 0$

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$
$$a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = 3$$

Troviamo delle soluzioni che siano proporzionali alle loro derivate.

$y(t) = e^{\lambda t}$ ha derivata proporzionale alla funzione stessa → risolve l'equazione di partenza per qualche valore di λ?

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Sostituiamo y, y' e y'' nell'equazione differenziale, troviamo:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} = 0$$
$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0$$
$$\cancel{e^{\lambda t}}(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 \to \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -3$$

$y_1(t) = e^{-1t} \qquad y_2(t) = e^{-3t}$

Queste due funzioni non sono proporzionali perchè il loro rapporto è la funzione: $\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \frac{e^{-t}}{e^{-3t}} = e^{2t}$ ← che non è costante.

Caso $\Delta < 0$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$
$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Le due soluzioni sono:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta$$
$$\lambda_2 = \alpha - i\beta$$
$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

L'equazione ha due soluzioni **reali, linearmente indipendenti:**

$$u_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$
$$u_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

Utilizzando il teorema di struttura, possiamo scrivere l'integrale generale:

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t))$$

- Dimostrazione: $y'' + 2y' + 10y = 0$ trovare l'integrale generale

  Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

  $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

  $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

  $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + 10e^{\lambda t} \to e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\lambda + 10) = 0$

  $$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

  $$\Delta = -36$$
  $$\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$$
  $$\lambda_1 = -1 + 3i \qquad \lambda_2 = -1 - 3i$$

  $y_1(t) = e^{(-1+3i)}t \qquad y_2(t) = e^{(-1-3i)}t$

  Ricordando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso:

  $$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$$

  $y_1 = e^{-t}(\cos(3t) + i\sin(3t))$

  $y_2 = e^{-t}(\cos(3t) - i\sin(3t))$

  Ricordando che l'equazione è lineare omogenea e che quindi ogni combinazione di y_1, y_2 è ancora soluzion, possiamo costruire due funzioni reali:

  - Una **sommando** y_1 e y_2:

    $$u_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = e^{-t}\cos(3t)$$

  - Una facendo la **differenza** di y_1, y_2:

    $$u_2(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i} = e^{-t}\sin(3t)$$

  Le due funzioni sono linearmente indipendenti perchè il loro rapporto non è costante (dipende da t)

  $$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{e^{-t}\cos(3t)}{e^{-t}\sin(3t)} = \cot(3t)$$

  L'integrale generale può essere infine scritto come:

  $$y(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$$
  $$= e^{-t}(c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t))$$

Caso $\Delta = 0$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$
$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$
$$y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$$

Sono linearmente indipendenti e sono soluzioni dell'equazione differenziale. Dal teorema di struttura, **l'integrale generale** è:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

▼ Dimostrazione: determinare l'integrale generale di $y'' - 6y' + 9y = 0$

Cerchiamo soluzioni esponenziali $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$
$$\Delta = 36 - 36 = 0$$

Siccome il discriminante è nullo, l'equazione caratteristica ha due radici reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Questo metodo ci permette di trovare solo una soluzione dell'equazioni differenziale: $y_1 = e^{3t}$. Tra le soluzioni ci sono anche tutti i multipli di e^{3t} → $y_1(t) = ce^{3t} \qquad c \in \mathbb{R}$. Per torvare l'integrale generale ci occorre un'altra soluzione **linearmente indipendente** da $y_1 = ce^{3t}$.

Per fare ciò troviamo $y_2 = c(t)e^{3t}$ che risolva l'equazione differenziale $y'' - 6y' + 9y = 0$. Per vedere quali condizioni deve rispettare c, calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$y_2 = c(t)e^{3t}$$
$$y_2' = c'(t)e^{3t} + 3c(t)e^{3t}$$
$$y_2'' = c''(t)e^{3t} + 3c'(t)e^{3t} + 3c'(t)e^{3t} + 9c(t)e^{3t}$$

Sostituiamole ora nell'equazione differenziale:

$$e^{3t}[c''(t) + 6c'(t) + 9c(t)] - 6e^{3t}[c'(t) + 3c(t)] + 9c(t)e^{3t} = 0$$
$$\Rightarrow \cancel{e^{3t}}[c''(t) + \cancel{6c'(t)} + \cancel{9c(t)} - \cancel{6c'(t)} - \cancel{18c(t)}] + \cancel{9c(t)} = 0$$

$$\Rightarrow c''(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

La condizione su c ci dice che deve avere derivata seconda nulla per ogni t

Per trovare la costante c baserà integrare due volte:

$$c''(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$c'(t) = c_1$$
$$c(t) = c_1 t + c_2 \qquad \forall c_1, c_2$$

In particolare $c(t) = t$ soddisfa la nostra condizione.

Quindi:

$$y_1 = e^{3t}$$
$$y_2 = te^{3t}$$

Risolve l'equazione differenziale. Siccome e y_1 è linearmente indipendente da y_2 (non proporzionale al rapporto)

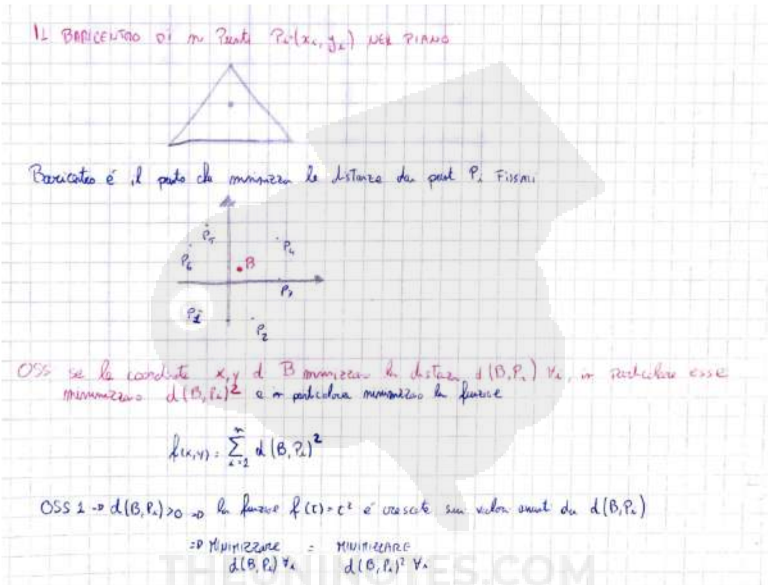
$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{3t}}{t} = \frac{1}{t} \to \text{non è costante}$$

Quindi grazie al teorema di struttura, l'integrale generale è la combinazione di y_1, y_2 per ogni valore delle costanti reali c_1, c_2

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = e^{3t}(c_1 t + c_2)$$

Esercizi presenti sul programma

▼ Il baricentro di n punti $P_i = (x_i, y_i)$ nel piano



OSS 2 → Poiché $\sum_{i=1}^{m} d(B,P_i)^2$ cresce al crescere di m, minimizzare $d(B,P_i)^2 \ \forall i \Rightarrow$
= minimizzare $f(x,y)$

MINIMIZZO $f(x,y)$

1. $d(B,P_i)^2 = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2$

$$\Rightarrow f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \right]$$

$$\nabla f = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{m}(x-x_i) \\ 2\sum_{i=1}^{m}(y-y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(mx - \sum_{i=1}^{m} x_i\right) \\ 2\left(my - \sum_{i=1}^{m} y_i\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \\ y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i \end{cases} \qquad B = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i , \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i \right)$$

2. Verifico che è un minimo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2m$$

$$f_{yy} = 2m \qquad \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} \det H = 4m^2 > 0 \\ 2m > 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow B \text{ è un minimo}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 0$$

▼ Ottimizzazione del profitto $P(K, L)$ con il modello Cobb-Douglas

Esercizio 2 → Ottimizzazione del profitto $P(K, L)$

Secondo il modello di Cobb-Douglas la produzione totale "p" di un prodotto dipende dalla q.tà di lavoro L e dal capitale K secondo questa relazione:

$$p(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta} \qquad \begin{matrix} a > 0 \\ 0 < \alpha, \beta < 1 \end{matrix}$$

Indichiamo con

n = costo di una unità di capitale
m = costo di una unità di lavoro

e scriviamo la funzione che ci dà il profitto come $P(K,L) = p(K,L) - mL - nK$

DOMANDA: MASSIMIZZARE P nel caso in cui $\begin{matrix} n = \alpha \\ m = \beta \end{matrix} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ \alpha + \beta < 1 \end{matrix}$

OTTIMIZZAZIONE LIBERA.

Soluzione → $P(K,L) = K^{\alpha}L^{\beta} - \beta L - \alpha K$

1.

$P(K,L) = K^{\alpha} L^{\beta} - \beta L - \alpha K$

① Punti critici

$$\nabla P = 0 = \begin{pmatrix} \alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} - \alpha \\ \beta K^{\alpha} L^{\beta-1} - \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} K^{\alpha-1} L^{\beta} = 1 \\ K^{\alpha} L^{\beta-1} = 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} K^{\alpha-1} = L^{-\beta} \\ K \cdot L^{-\beta} \cdot L^{\beta-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{K}{L} = 1 \rightarrow K = L$$

$\Rightarrow Q_K = (K, K) \;\forall$ punti critici

② Studio la natura dei punti critici.

$$P_{KK} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot K^{\alpha-2} \cdot L^{\beta}$$

$$P_{LL} = \beta(\beta-1) \cdot L^{\beta-2} \cdot K^{\alpha}$$

$$P_{LK} = P_{KL} = \alpha\beta K^{\alpha-1} L^{\beta-1}$$

$$HP(K, \underset{L}{K}) = \begin{pmatrix} \overset{<0}{\alpha}(\alpha-1) K^{\alpha+\beta-2} & \alpha\beta K^{\alpha+\beta-2} \\ \alpha\beta K^{\alpha+\beta-2} & \beta(\beta-1) K^{\alpha+\beta-2} \end{pmatrix}$$

$$\det HP(K,K) = \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) K^{2(\alpha+\beta-2)} - \alpha^2\beta^2 K^{2(\alpha+\beta-2)} =$$

$$= \alpha\beta K^{2(\alpha+\beta-2)} \left[(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta\right] =$$

$$= \alpha\beta \left[1 + \cancel{\alpha\beta} - \alpha - \beta - \cancel{\alpha\beta}\right] K^{2(\alpha+\beta-2)}$$

$$= \alpha\beta \cdot \left[1 - \underbrace{(\alpha+\beta)}_{>0}\right] K^{2(\alpha+\beta-2)} > 0$$

e

$$\alpha(\alpha-1) K^{\alpha+\beta-2} < 0$$

$\Rightarrow$ I PUNTI DELLA FORMA K, K SONO MASSIMI

▼ Massimizzare la funzione di produzione sul vincolo di budget fissato $nK + mL = b$

Massimizzare la funzione di produzione $p(K,L)$ sul vincolo di budget fissato:

$$mK + mL = b$$

Soluzione: Massimizzo $p(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta}$ su

$E\{(K,L) \mid mK+mL=b\}$ → se $L = \frac{b}{m}$ → $mK+b=b$ ⇒ $mK=0$ (non ha senso)

① Esplicito il vincolo: $K = \frac{b-mL}{m}$

$$\Rightarrow p(K,L) = a\left(\frac{b-mL}{m}\right)^{\alpha} \cdot L^{\beta} = \varphi(L)$$

② Per Weierstrass ho che E è compatto, infatti $m, K, m, L > 0$

⇒ affinché la somma sia uguale a b non posso prendere qualsiasi valore di K e L

⇒ E è limitato inoltre E è chiuso ⇒ è compatto

inoltre P è continua ⇒ per Weierstrass $P|_E$ ammette massimo e minimo assoluti

③ $$\varphi'(L) = \alpha a\left(\frac{b-mL}{m}\right)^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} + a\left(\frac{b-mL}{m}\right)^{\alpha} \cdot \beta L^{\beta-1} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{a}\left(\frac{b-mL}{m}\right)^{\alpha-1}}_{\neq 0} \underbrace{\cancel{L^{\beta-1}}}_{\neq 0}\left[\alpha L + \frac{b-mL}{m}\beta\right] = 0$$

$\alpha-1 < 0$

$L \neq \frac{b}{m}$

$$\Rightarrow \alpha L + \frac{b-mL}{m}\beta = 0$$

$$(m\alpha - m\beta)L = -b\beta \Rightarrow \boxed{L = \frac{\beta b}{m\beta - m\alpha}}$$

→ il punto stazionario è unico, però ho una condizione su L $(0 \leq L \leq L_0)$

Gli estremanti possono apparire in corrispondenza degli estremi dell'intervallo consentito!

FISSANDO I PARAMETRI, POSSO STUDIARE LA NATURA DEL PUNTO $L = \frac{\beta b}{m\beta - m\alpha}$