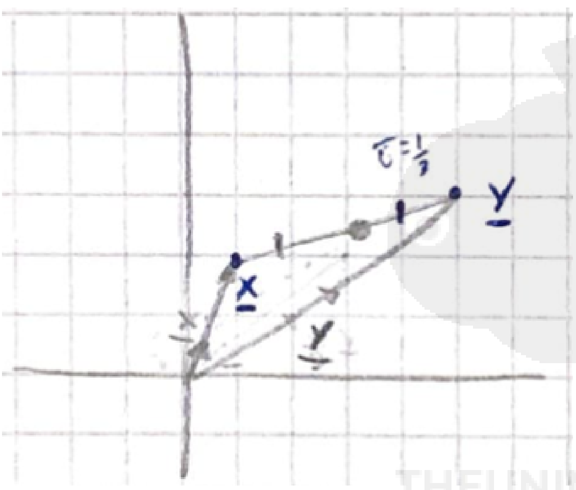
Formulario Funzioni convesse

Insieme convesso
Funzione concava o convessa
Teorema convessità e piano tangente
Teorema (*) ottimizzazione di funzioni convesse
In 2 variabili

In $\mathbb{R}^n$ si chiama **SEGMENTO** di estremi $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ l'insieme dei punti $t\underline{x} + (1+t)\underline{y}$ con $0 \leq t \leq 1$. Ad esempio in $\mathbb{R}^2$



$t = 0 \rightarrow \underline{y}$

$t = 1 \rightarrow \underline{x}$

$t = \frac{1}{2} \rightarrow \dfrac{\underline{x}+\underline{y}}{2}$

$t = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}\underline{x} + \frac{2}{3}\underline{y}$ ← regola del parallelogramma

Combinazione lineare con coefficienti che sono positivi e hanno per somma 1 → $(t\underline{x} + (1-t)\underline{y})$ → **combinazione lineare convessa**

Insieme convesso

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad A$ è convesso se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ si ha che $t\underline{x} + (1-t)\underline{y} \in A \qquad \forall t \in [0,1]$

Funzione concava o convessa

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad A$ **convesso** → è il dominio, altrimenti non tutti i punti di f apparterrebbero ad A.

- f è **convessa** in A se $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A \quad \forall t \in [0,1]$ si ha che

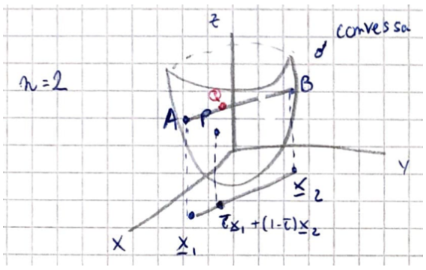
$$f(t\underline{x}_1 + (1-t)\underline{x}_2) \le tf(\underline{x}_1) + (1-t)f(\underline{x}_2)$$

- f è **concava** se $\forall x_1, x_2 \in A \quad \forall t \in [0,1]$ si ha che

$$f(t\underline{x}_1 + (1-t)\underline{x}_2) \ge tf(\underline{x}_1) + (1-t)f(\underline{x}_2)$$

> 📌 f è concava se e solo se f è convessa

- Se $f((t\underline{x}_1 + (1-t)\underline{x}_2) = tf(\underline{x}_1) + (1-t)f(\underline{x}_2)$ → è una **funzione lineare**



$f(t\underline{x}_1 + (1-t)\underline{x}_2)$ è la z di P **sulla superficie grafico della funzione**. (proiezione di P sul piano x,y)

Il segmento di estremi $(\underline{x}_1, f(\underline{x}_1)) = A$ e $(\underline{x}_2, f(\underline{x}_2)) = B$

$$\begin{gathered} t(\underline{x}_1, f(\underline{x}_1)) + (1-t)(\underline{x}_2, f(\underline{x}_2)) \\ (t\underline{x}_1, tf(\underline{x}_1)) + ((1-t)\underline{x}_2, (1-t)f(\underline{x}_2)) \\ (\underbrace{t\underline{x}_1 + (1-t)\underline{x}_2}_{\downarrow}, \underbrace{tf(\underline{x}_1) + (1-t)f(\underline{x}_2)}_{\text{è la z di Q}}) \end{gathered}$$

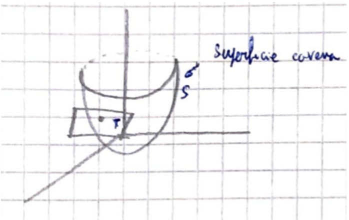
$t\underline{x}_1 + (1-t)\underline{x}_2$ → è la proiezione di Q sul piano x, y che è uguale alla proiezione di P sul piano x, y.

- f è **convessa** $\Rightarrow$ la z di P è $\le tf(\underline{x}_1) + (1-t)f(\underline{x}_2) \rightarrow z_p \le z_q$ → il segmento di estremi A e B giace sopra (non sotto) alla superficie grafico di f.
- f è **convessa** $\Rightarrow$ la z di P è $\ge tf(\underline{x}_1) + (1-t)f(\underline{x}_2) \rightarrow z_p \ge z_q$ → il segmento di estremi A e B giace sotto (non sopra) alla superficie grafico di f.

Teorema convessità e piano tangente

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad A$ convesso, aperto, f differenziabile in A

- S superficie grafico di $f \quad z = f(x, y)$
- π piano tangente a S in (x_0, y_0)



$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- f è **convessa** in A se e solo se $\forall (x_0, y_0) \in A$

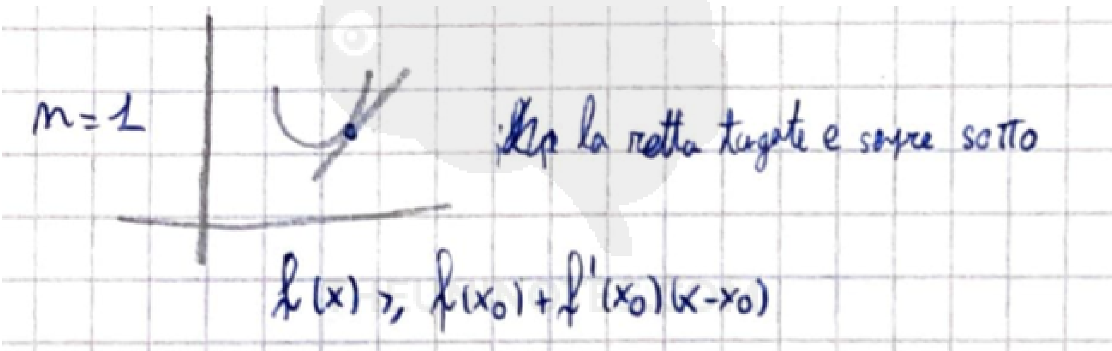
$$f(x,y) \geq \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{eq. del piano tangente}}$$

(il piano sta sempre sotto, la superficie grafico sta sempre sopra)

- f è **concava** in A se e solo se $\forall (x_0, y_0) \in A$

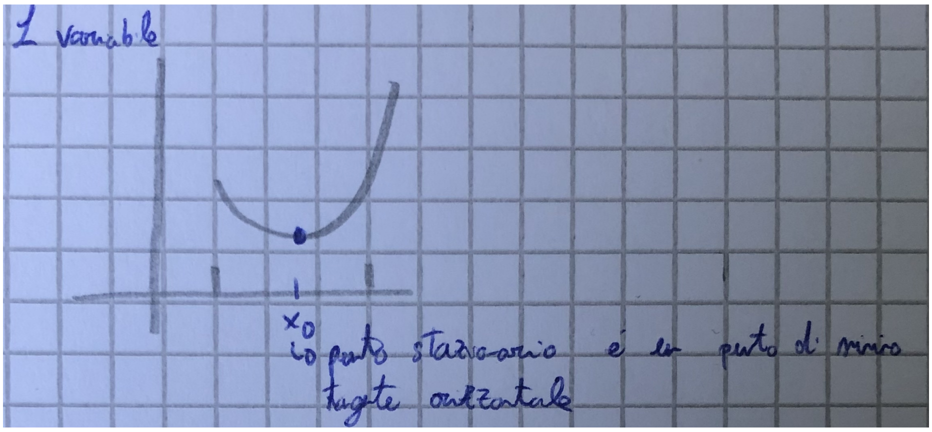
$$f(x,y) \leq \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{eq. del piano tangente}}$$

▼ In 1 variabile



Teorema (*) ottimizzazione di funzioni convesse

▼ In 1 variabile



$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se f è derivabile 2 volte in (a,b) e se $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b)$, allora la f è **convessa** in (a,b) e viceversa.

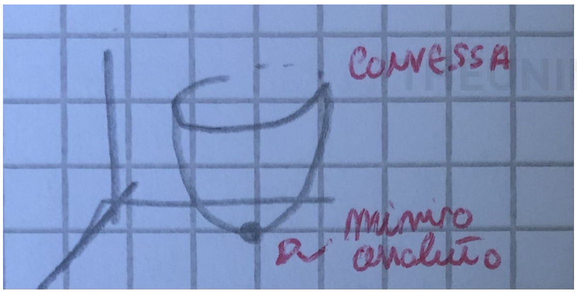
$$f''(x)\geq 0 \Rightarrow f \text{ è convessa}$$
$$f \text{ è convessa} \Rightarrow f''(x)\geq 0$$

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow f \text{ è convessa}$$

$$f''(x)\leq 0 \Leftrightarrow f \text{ è concava}$$

In 2 variabili

$f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad A$ aperto, A convesso



- f differenziabile in A, f **convessa** in A, (x_0,y_0) punto stazionario $\Rightarrow$ (x_0,y_0) è un punto di **minimo assoluto** di f in A.
- f differenziabile in A, f **concava** in A, (x_0,y_0) punto stazionario $\Rightarrow$ (x_0,y_0) è un punto di **massimo assoluto** di f in A.

▼ Dimostrazione

Per il teorema precedente si ha che

$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)+\cancel{f_x(x_0,y_0)(x-x_0)}+\cancel{f_y(x_0,y_0)(y-y_0)} \quad \forall(x,y)\in A$$
$$\Rightarrow f(x,y)\geq f(x_0,y_0) \quad \forall(x,y)\in A$$

$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \Rightarrow$ è la definizione di punto di **minimo assoluto**.

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ A aperto, A convesso, $f \in \mathcal{C}^2(A) \leftarrow$ vale il teorema di Schwarz

$$d^2 f(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2$$

- f è **convessa** in A se e solo se $\forall (x_0,y_0) \in A \quad d^2 f(x_0,y_0) \geq 0 \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$
  - La forma quadratica $d^2 f(x_o,y_0)$ è **definita positiva o anche semidefinita positiva**
- f è **concava** in A se e solo se $\forall (x_0,y_0) \in A \quad d^2 f(x_0,y_0) \leq 0 \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$
  - La forma quadratica $d^2 f(x_o,y_0)$ è **definita negativa o anche semidefinita negativa**
