Formulario modelli di variabili aleatorie

Quando di usano i modelli di variabili aleatorie?

Modelli di variabili aleatorie discrete e continue

Nome	Simbolo	Quando si usa
Bernoulli	$X \sim B(1,p)$	É un esperimento casuale in cui ci sono **2** possibili esiti. É una binomiale che ha un solo tentativo
Binomiale	$X \sim B(n,p)$	É un esperimento (o prova) di Bernoulli di parametro p che viene eseguito n volte indipendenti. Descrive il numero di successi in un esperimento di Bernoulli.
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	Esprime le probabilità per il **numero di eventi** che si **verificano** successivamente ed indipendentemente in un dato **intervallo di tempo**, sapendo che mediamente se ne verifica un numero λ. Ad esempio, per misurare il numero di chiamate ricevute in un call-center in una mattinata lavorativa. Di solito il numero di prove n è molto alto, ma la probabilità p che esse si verifichino è molto basso.
Geometrica	$X \sim \mathcal{G}(p)$	Rappresenta il primo successo in un insieme di esperimenti uguali. "*Lancio tante volte la monete, quante volte devo lanciarla prima di ottenere testa?*" Se in un esperimento casuale sono soddisfatte le seguenti condizioni: C'è una successione di prove; Due possibili risultati (successo / fallimento); Le prove sono indipendenti; La probabilità del successo p ad ogni prova rimane costante;
Ipergeometrica	$X \sim \mathcal{I}(N,M,n)$	La variabile aleatoria X si dice variabile aleatoria **ipergeometrica di parametri** N, M **e** n**.** L'esperimento deve essere **senza reinserimento.** Gli esiti devono essere equiprobabili.
Uniforme	$X \sim \mathcal{U}(a,b)$	É **uniforme** su un **insieme**, ovvero che attribuisce la **stessa probabilità** a tutti i **punti appartenenti** ad un dato **intervallo** $[a,b]$ contenuto nell'insieme.
Esponenziale	$X \sim \epsilon(\lambda)$	La distribuzione esponenziale può rappresentare il **tempo di attesa prima che si verifichi un certo evento casuale,** per esempio: (Il tempo che trascorrerà, a partire da questo momento, fino al verificarsi di un terremoto).
Normale	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	É una distribuzione di probabilità continua che è spesso usata come **prima approssimazione** per descrivere **variabili casuali** a valori reali che tendono a **concentrarsi** attorno a un **singolo valor medio**

Nome	Simbolo	Quando si usa
t di Student	t_n	É una distribuzione di probabilità continua che governa il **rapporto tra due variabili aleatorie**, la **prima** con **distribuzione normale** e la **seconda**, al quadrato, segue una **distribuzione chi quadrato**

Modelli di variabili aleatorie discrete

▼ Tabella delle principali distribuzioni discrete → distribuzioni di variabili aleatorie discrete

7.1 Distribuzioni discrete

NOME SIMBOLO PARAMETRI	DENSITÀ DISCRETA $f(x) = P(X = x)$	MEDIA	VARIANZA
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1;p)$ $0 < p < 1$	$f(1) = p$ $f(0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
binomiale $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ $n = 1, 2, \ldots; \ 0 < p < 1$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $x = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
binomiale negativa $X \sim \overline{\mathcal{B}}(n;p)$ $n = 1, 2, \ldots; \ 0 < p < 1$	$\binom{x-1}{n-1} (1-p)^{x-n} p^n$ $x = n, n+1, \ldots$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
binomiale negativa traslata $X + n \sim \overline{\mathcal{B}}(n;p)$ $n = 1, 2, \ldots; \ 0 < p < 1$	$\binom{x+n-1}{n-1} (1-p)^x p^n$ $x = 0, 1, \ldots$	$\frac{n(1-p)}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
geometrica $X \sim \mathcal{G}(p) = \overline{\mathcal{B}}(1;p)$ $0 < p < 1$	$(1-p)^{x-1} p$ $x = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
geometrica traslata $X + 1 \sim \mathcal{G}(p)$ $0 < p < 1$	$(1-p)^x p$ $x = 0, 1, \ldots$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
ipergeometrica $X \sim \mathcal{I}(N;M;n)$ M, N, n interi $1 \le n \le N, 1 \le M \le N$	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = P(X=x)$ $x = 0, 1, \ldots, n$ $n - (N - M) \le x \le M$	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ $x = 0, 1, 2, \ldots$	λ	λ

Variabili aleatorie di Bernoulli → è una binomiale che ha un solo tentativo

Un esperimento di **Bernoulli** è un esperimento casuale in cui ci sono **2** possibili esiti

$$\begin{cases} \text{un esito che si chiama "successo"} = \text{S} \\ \text{un esito che si chiama "fallimento"} = \text{F} \end{cases}$$

Lo spazio degli esiti è $\Omega = \{S, F\}$.

Sia $p \in [0,1]$ tale che $P(S) = p$ e $P(F) = 1 - p$, abbiamo che:

$$P(\Omega) = 1 = P(S) + P(F) = p + P(F) = p + (1 - p)$$

La variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p si denota con:

$$\boxed{X \sim \beta\{1, p\}}$$

$$\boxed{\begin{cases} X(S) = 1 \\ X(F) = 0 \end{cases} \Rightarrow D_x = \{0, 1\}}$$

Massa di probabilità

⇒ La massa di probabilità della variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p è definita su l'insieme $\{0, 1\}$ da:

$$\boxed{\begin{cases} p_x(1) = P(X = 1) = p \\ p_x(0) = P(X = 0) = 1 - p \end{cases}}$$

La variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p si denota con

$$\boxed{X \sim \beta\{1, p\}}$$

Funzione di ripartizione

$$\begin{cases} 0 \quad \text{se } x < 0 \\ 1 - p \quad \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 \quad \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Valore atteso, varianza: sia $X \sim \mathrm{B}\{1, p\}$

- $E(X) = p$
- $E(X^2) = p$
- $Var(X) = p(1 - p) = p$
- $\phi(t) = 1 - p + pe^t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$ ← funzione generatrice

---

Variabili aleatorie binomiali

Consideriamo un esperimento (o prova) di Bernoulli di parametro p che viene eseguito n volte indipendenti.

La variabile aleatoria X si dice variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) e si scrive

$$X \sim \beta(n,p)$$

Dove n è il numero di volte che viene eseguito l'esperimento e p è la probabilità di successo. Descrive il numero di successi in un esperimento di Bernoulli.

Lo spazio degli esiti è:

$$\Omega = \{(i_1, \dots, i_n) \text{ tale che } i_k \in \{S, F\}; k = 1, \dots, n\}$$

Funzione di massa di probabilità

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di successi in questo esperimento. Lo spazio di X è $D_x = \{0, 1, \dots, n\}$.

In genere per qualsiasi n e per tutto $k \in D_x = \{0, 1, \dots, n\}$

$$p_x(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Valore atteso, varianza: $X \sim \beta(n, p)$

- $E(X) = np$
- $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$
- $Var(X) = np(1-p)$
- $\phi(t) = (1 - p + pe^t)^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ← funzione generatrice
- **Mediana** tre $[np]$ e $[np]$ → non precisa
- **Moda** $[p(n+1)]$ se $p(n+1) \notin \mathbb{N}$

Variabile aleatoria di Poisson

Esprime le probabilità per il **numero di eventi** che si **verificano** successivamente ed indipendentemente in un dato **intervallo di tempo**, sapendo che mediamente se ne verifica un numero λ. Ad esempio, si utilizza una distribuzione di Poisson per misurare il numero di chiamate ricevute in un call-center in un determinato arco temporale, come una mattinata lavorativa. Questa distribuzione è anche nota come **legge degli eventi rari.**

Una variabile aleatoria di Poisson o poissoniana di parametro λ $(\lambda > 0)$ e si scrive:

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

è una variabile aleatoria che assume i valori $0, 1, \dots, n$.

Di solito il numero di prove n è molto alto, ma la probabilità p che esse si verifichino è molto basso.

Funzione di massa di probabilità

Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) dove n è molto grande e p è molto piccolo e si ponga $\lambda = np$. Dove i è il numero di eventi per intervallo di tempo di cui si vuole la probabilità.

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Ricorda:

> $(1 - \frac{x}{n})^n \to e^{-x}$

> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Valore atteso, varianza

- $E(X) = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- $\phi(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- **Mediana** $\simeq \lambda + \frac{1}{3} - \frac{1}{50\lambda}$
- **Moda** = sia λ che $\lambda - 1$ se $\lambda \in \mathbb{N}$

Somma di due variabili poissoniane

La somma di due poissoniane indipendenti è ancora una poissoniana.

$$\begin{cases} X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1) \\ X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \end{cases}$$
$$X_1 \text{ e } X_2 \text{ sono indipendenti}$$
$$\text{allora } X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Densità

Poisson di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$ → è la **densità della variabile**

Variabili aleatorie geometriche

Rappresento il primo successo in un insieme di esperimenti uguali.

"*Lancio tante volte la monete, quante volte devo lanciarla prima di ottenere testa?*"

Se in un esperimento casuale sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. C'è una successione di prove;
2. Due possibili risultati (successo / fallimento);
3. Le prove sono indipendenti;
4. La probabilità del successo p ad ogni prova rimane costante;

Funzione di massa di probabilità

La funzione di massa di probabilità della variabile aleatoria X, che indica il numero di prove necessarie per avere il **primo successo**, è data da:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad k = 1, 2, \dots$$

X si dice **variabile aleatoria geometrica** di parametro p e si denota con

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

Funzione di ripartizione

$$1 - (1-p)^k$$

Per ogni reale x, abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

e per ogni $|x| < 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x}$$

Spazio degli esiti

$D_x = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$ → può assumere tutti i valori naturali, tranne lo 0

Valore atteso, varianza

Sia X una variabile aleatoria geometrica di parametro p, allora:

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $E(X^2) = \frac{2-p}{p^2}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $\phi(t) = \frac{pe^t}{1-e^t(1-p)} \qquad t < -\log(1-p)$

- **Mediana** $= \log_{1-p} \frac{1}{2}$ **se** $\log_{1-p} \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$
- **Moda** $= 0$

Proprietà assenza di memoria della variabile geometrica

Sia X una variabile aleatoria geometrica di parametro p. Il fatto di avere già atteso k prove **senza** avere ottenuto un successo **NON modifica** la probabilità di attendere altre m prove prima di ottenere il primo successo, poiché le prove sono indipendenti:

Sia $X \sim \mathcal{G}(p)$ e siano $m \geq 1$ e $k \geq 1$, abbiamo:

$$P(X = m + k | X \geq k) = P(X = m)$$

La probabilità di $X = m + k$ data $X \geq k$ → probabilità condizionata

Variabili aleatorie ipergeometriche

$$X \sim \mathcal{I}(N, M, n)$$

La variabile aleatoria X si dice variabile aleatoria **ipergeometrica di parametri** N, M **e** n

- L'esperimento deve essere **senza reinserimento**
- Gli esiti devono essere equiprobabili

Esperimento: Consideriamo un esperimento casuale in cui ci sono

$$\begin{cases} N \text{ successi} \\ e \\ M \text{ fallimenti} \end{cases}$$

- L'estrazione avviene senza reinserimento.

Dall'insieme di $M + N$ elementi, vengono estratti n esiti $(n \leq N + M)$.

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di successi delle n estrazioni

- Il **numero totale di esiti** (**equiprobabili**) → casi possibili

$$\Rightarrow \binom{N+M}{n}$$

- Lo **spazio degli esiti** di X è $D_x = \{0, \ldots, \min(n, N)\}$ → dove il $\min(n, N)$ è il minimo di ne N.
  - Sia $k \in D_x$, abbiamo $(X = k)$: "ci sono k successi scelti fra N successi e ci sono $(n - k)$ fallimenti scelti fra M fallimenti"
- Il numero di modi nei quali è possibile **scegliere k successi fra N successi** è:

$$\Rightarrow \binom{N}{k}$$

- Se fra n estrazioni, ci sono k successi, necessariamente le restanti $n-k$ estrazioni sono fallimenti. Il numero di modi nei quali è possibile **scegliere $(n-k)$ fallimenti fra M fallimenti** è:

$$\Rightarrow \binom{M}{n-k}$$

Di conseguenza, $\#(X=k) = \binom{N}{k} \cdot \binom{M}{n-k}$ → La cardinalità

Funzione di massa di probabilità

Per **esiti equiprobabili**

$$P(X=k) = \frac{\binom{N}{k} \cdot \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}} \qquad \text{con } k \in D_x$$

Sia X una variabile aleatoria ipergeometrica di parametri N, M e n. Sia $X_i \sim \beta(1,p)$ una variabile aleatoria bernoulliana definita da:

$$X_i \begin{cases} 1 \text{ se l'i-esimo esito è successo} \\ 0 \text{ se l'i-esimo esito è fallimento} \end{cases}$$

$$P(X=1) = P(S) = \frac{\text{il numero di successi}}{\text{numero totale degli esiti}} = \frac{N}{N+M} = p$$

Speranza e Varianza per la variabile bernoulliana X_i

- $E(X_i) = \frac{N}{N+M}$
- $Var(X_i) = P(X_i = 1) \cdot P(X_1 = 0) = \frac{NM}{(N+M)^2}$

$$Var(X_i) = p(1-p) = \frac{N}{N+M}\left(1 - \frac{N}{N+M}\right) = \frac{N}{N+M}\left(\frac{N+M-N}{N+M}\right)$$
$$Var(X_i) = \frac{NM}{(N+M)^2}$$

- $Cov(X_i, X_j) = \frac{-NM}{(N+M)^2(N+M-1)}$

$$\begin{aligned}
E(X_i X_j) &= P(X_i X_j = 1) \\
&= P(X_i = 1, X_j = 1) \text{ perché } X_i X_j = 1 \iff X_i = 1 \text{ e } X_j = 1 \\
&= \frac{N-1}{N+M-1}\frac{N}{N+M} \\
Cov(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) \\
&= \frac{N-1}{N+M-1}\frac{N}{N+M} - \left(\frac{N}{N+M}\right)^2 \\
&= \frac{-NM}{(N+M)^2(N+M-1)}
\end{aligned}$$

Siccome $X = \sum_{k=1}^{n} X_i$

Valore atteso e Varianza per una variabile aleatoria ipergeometrica

- $E(X) = \frac{nN}{N+M}$

$$E(X) = E\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{nM}{N+M}$$

- $Var(X) = \frac{nNM}{(N+M)^2} \cdot \left[1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right]$

$$Var(X) = Var\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$
$$\Rightarrow Var(X) = \frac{nNM}{(N+M)^2} - n(n-1) \cdot \Big(\frac{-NM}{(N+M)^2(N+M-1)}\Big) =$$
$$\Rightarrow Var(X) = \frac{nNM}{(N+M)^2} \cdot \Big[1 - \frac{n-1}{N+M-1}\Big]$$

Modelli di variabili aleatorie continue

- Tabella delle principali distribuzioni continue → distribuzioni di variabili aleatorie continue

7.2 Distribuzioni continue

NOME SIMBOLO PARAMETRI	DENSITÀ CONTINUA $f(x) = \frac{d}{dx} P(X \leq x)$	MEDIA	VARIANZA
chi-quadrato $X \sim \chi^2(n) = \Gamma(n/2; 1/2)$ $n = 1, 2, \ldots$	$f(x) \propto x^{(n/2)-1} e^{-x/2}$ $x > 0$	n	$2n$
Erlang $X \sim \Gamma(n; \lambda)$ $n = 1, 2, \ldots; \lambda > 0$	$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$ $x > 0$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
esponenziale $X \sim \mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1; \lambda)$ $\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$ $x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
F di Fisher $X \sim \mathcal{F}(m; n)$ $m, n = 1, 2, \ldots$	$f(x) \propto \frac{x^{(m/2)-1}}{\left(1 + \frac{m}{n} x\right)^{(m+n)/2}}$ $x > 0$	$\frac{n}{n-2}$ per $n \geq 3$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ per $n \geq 5$
log-normale $\ln X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ $-\infty < \mu < +\infty; \sigma > 0$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ $x > 0$	$e^{\mu + (\sigma^2/2)}$	$\left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2}$
normale $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ $-\infty < \mu < +\infty; \sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ $-\infty < x < +\infty$	μ	σ^2
t di Student $X \sim t(n)$ $n = 1, 2, \ldots$	$f(x) \propto \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$ $-\infty < x < +\infty$	0 per $n \geq 2$	$\frac{n}{n-2}$ per $n \geq 3$
uniforme $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ $a < b$	$\frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

Variabili aleatorie uniformi

É **uniforme** su un **insieme**, ovvero che attribuisce la **stessa probabilità** a tutti i **punti appartenenti** ad un dato **intervallo** $[a, b]$ contenuto nell'insieme.

$$X \sim \mathcal{U}(a, b)$$

Funzione di densità

Una variabile aleatoria continua X si dice **uniforme** sull'intervallo $[\alpha, \beta] \quad (\alpha < \beta)$ se ha **funzione di densità** data da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & se\ \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x)$

Funzione di ripartizione

$$P(X < x) = F(x) = \int_a^x f(x)$$

Siccome siamo nel caso continuo, dato l'intervallo $[a, b]$

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

Dato l'intervallo $[a; b]$, si ha:

$$P(a < X < b) = \frac{\min(b, \beta) - \max(a, \alpha)}{\beta - \alpha}$$

Dove $\min(b, \beta)$ è il minimo tra l'intervallo dato $P(a < X < b)$ e l'intervallo sul quale la variabile aleatoria è definita.

Valore atteso, varianza

- $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$
- $Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$
- $\phi(t) = \begin{cases} 1 & se\ t = 0 \\ \frac{e^{t\beta} - e^{t\alpha}}{t(\alpha-\beta)} & se\ t \neq 0 \end{cases}$
- **Mediana** $= \frac{\alpha+\beta}{2}$

▼ Esempio variabile aleatoria continua

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria $\mathcal{U}(0,1)$.

(a) Qual è la probabilità che X sia più piccolo di $\frac{2}{3}$?

(b) Calcolare densità è funzione di ripartizione di $Y = X^2$.

(c) Calcolare media e varianza di Y.

(d) Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$.

Soluzione. (a)

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{2}{3}\right) = \int_0^{\frac{2}{3}} 1dt = \frac{2}{3}$$

(b) Sia $0 \leq t \leq 1$

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}) = \sqrt{t}$$

Quindi

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{t} & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

Inoltre

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} t dt = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 t^2 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{5}$$

Quindi $\mathrm{Var}(Y) = \frac{4}{45}$.

(d) Vale sempre che per $0 < t < 1$

$$\mathbb{P} Y \leq t = \sqrt{t}$$

Da cui la risposta alle domande è sempre la stessa.

Variabili aleatorie esponenziali

La distribuzione esponenziale può rappresentare il **tempo di attesa prima che si verifichi un certo evento casuale,** per esempio**:**

- (Il tempo che trascorrerà (a partire da questo momento) fino al verificarsi di un terremoto).
- Il tempo allo scoppiare di un nuovo conflitto.
- Il tempo al giungere della prossima telefonata di qualcuno che ha sbagliato numero

Una variabile aleatoria continua X si dice **esponenziale con parametro** (o intensità) λ ($\lambda > 0$) e si scrive:

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

Spazio degli esiti - Valori che può assumere

$$D_x = \{x, \dots\} \text{ tale che } x \geq 0$$

Funzione di densità

Se X ha **funzione di densità** data da:

$$f(x) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Funzione di ripartizione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \to F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Valore atteso e varianza

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $\phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}; \quad t < \lambda$
- **Mediana** $\frac{\log 2}{\lambda}$
- **Moda** $= 0$

Proprietà di assenza di memoria

Sia $X \sim \epsilon(\lambda)$ e siano $s, t \geq 0$.

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

$$P(X > s) = e^{-\lambda s}$$

▼ Dimostrazione

$$P(X > s) = e^{-\lambda s}$$
$$P(X > s) = 1 - P(X < s) = 1 - P(X \leq s) = 1 - F(s) = 1 - (1 - e^{-\lambda s}) = e^{-\lambda s}$$

▼ Esempio

3. Domanda A.3. Assumendo che l'edificio si approvvigioni da una cisterna riempita con 5 ettolitri d'acqua all'inizio della settimana, determinare la probabilità che alla fine della settimana nella cisterna rimanga almeno 1/4 dell'acqua che vi era contenuta all'inizio.
(2 punti)

- $\lambda = \frac{1}{10}$

$$1 - e^{-\frac{5-\frac{1}{4}}{10}} = 1 - e^{-\frac{3.75}{10}} = 0.312$$

Somma di variabili aleatorie esponenziali

La distribuzione esponenziale (o di Laplace) può dedursi anche come la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria definita come somma dei quadrati di due variabili aleatorie normali standardizzate (ossia con valore atteso zero e varianza unitaria).

Generalizzazione a più variabili aleatorie

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono variabili aleatorie esponenziali e indipendenti, di parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ rispettivamente, allora la variabile aleatoria $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ è esponenziale di parametro $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ → $\epsilon(n\lambda)$

e come **funzione di ripartizione**

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-n\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 \quad \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se $Z = max(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow F_z(x) = \prod_{k=1}^{n} F_{x_k}(x)$

Se $Z = min(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow F_z(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} [1 - F_{x_k}(x)]$

▼ Dimostrazione

$$\prod_{i=1}^{n} \leftarrow \text{sommatoria dei prodotti } P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \dots$$

Sia F_y la funzione di ripartizione. $F_y(x) = P(Y \leq x)$

Se $x \geq 0$

$$P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq x)$$
$$= 1 - P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geq x) \rightarrow$$
$$\min(X_1, X_2, \ldots, X_n > x) \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 > x \\ X_2 > x \\ \vdots \\ X_n > x \end{cases}$$
$$F_y(X) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > X, \ldots, X_n > x)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \quad \text{perché } X_1, \ldots, X_n \text{ sono indipendenti}$$
$$1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x} = e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow f_y(x) = F_y'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

Se $x < 0$

$$f_y(x) = F_y'(x) = 0 \qquad x < 0$$

$$F_y(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x)$$
$$\text{quando } x < 0, P(X_i > x) = P(X_i > 0) = 1$$
$$P(X_1 > x) = \lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t) \cdot \mathbf{1}_{(x,\infty)}(t) dt$$
$$= \lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \mathbf{1}_{[0,\infty) \cap (x,\infty)}(t)$$
$$\lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$$
$$P(X_i > x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_i}(t) dt = 1$$

$$f_y(x) = F_y(x) = 1 - 1 = 0$$

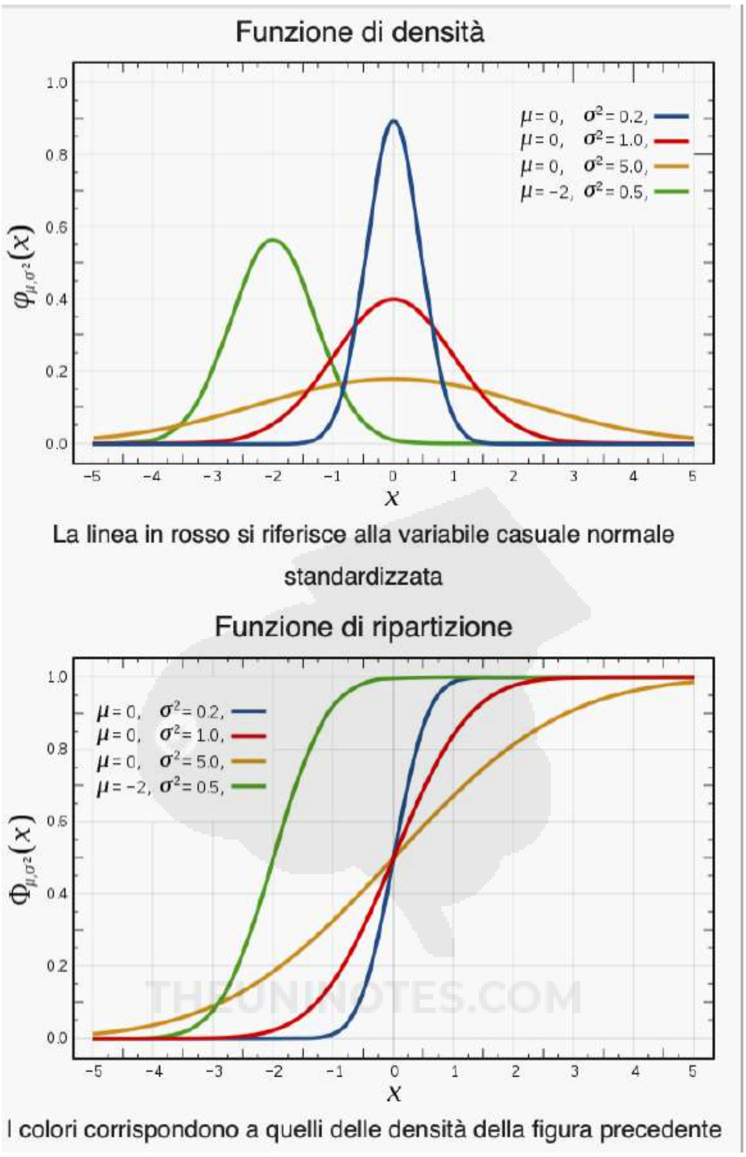
Funzione di ripartizione

$$f(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) \rightarrow F(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & 0 < t < 1 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Variabili aleatorie Normali o Gaussiane

É una distribuzione di probabilità continua che è spesso usata come **prima approssimazione** per descrivere **variabili casuali** a valori reali che tendono a **concentrarsi** attorno a un **singolo valor medio**. Il grafico della funzione di densità di probabilità associata è simmetrico e ha una **forma a campana:**

▼ Grafico



La linea in rosso si riferisce alla variabile casuale normale standardizzata

I colori corrispondono a quelli delle densità della figura precedente

---

Una variabile aleatoria X si dice **normale** (o gaussiana) di parametri μ → media e σ^2 → varianza $(\sigma^2 > 0)$, si scrive:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Osservazione:

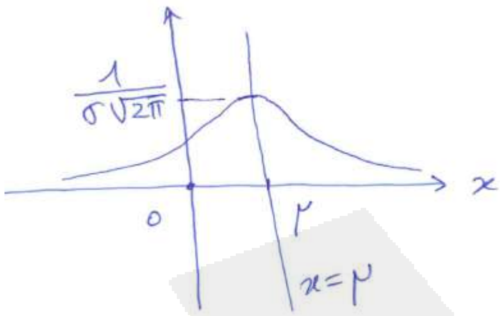
1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(\mu - x) = f(\mu + x)$

   $\Rightarrow$ La curva di f ammette la retta $x = \mu$ come asse di simmetria

2. Abbiamo:

$$f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

   $\Rightarrow$ Il massimo di f è pari $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$



Valore atteso, Varianza e mediana

- $E(X) = \mu$
- $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$
- $Var(X) = \sigma^2$
- **Mediana** $= \mu$
- **Moda** $= \mu$
- $\phi(t) = e^{(\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2})} \quad t \in \mathbb{R} \leftarrow$ funzione generatrice

▼ Dimostrazione

Dimostrazione: Abbiamo

$$\phi(t) = E(e^{tX})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma y+\mu)}\, e^{-y^2/2}\,dy$$

ponendo $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$
$\Rightarrow x = \sigma y + \mu$
$\Rightarrow dx = \sigma dy$
$\Rightarrow dy = \frac{dx}{\sigma}$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-y^2 + 2\sigma t y}{2}\right] dy.$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2 - 2\sigma t y + \sigma^2 t^2}{2} + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] dy$$

$$= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\sigma t)^2}{2}\right)}_{\text{è la funzione di densità di } N(\sigma t, 1)} dy}_{=1}.$$

(33)

$$\Rightarrow \phi(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \phi'(t) = (\mu + \sigma^2 t)\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \\ \phi''(t) = \left(\sigma^2 + (\mu+\sigma^2 t)^2\right)\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(X) = \phi'(0) = \mu \\ E(X^2) = \phi''(0) = \sigma^2 + \mu^2 \\ Var(X) = \sigma^2. \end{cases}$$

Proposizione:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e se $Y = \alpha X + \beta$, con $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Allora $Y \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$. In particolare se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ (cioè $\alpha = \frac{1}{\sigma}$ e $\beta = -\frac{\mu}{\sigma}$).

$$Y \sim N(0,1)$$
$$\cdot\ \alpha\mu + \beta = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$
$$\cdot\ \alpha^2\mu^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

▼ Dimostrazione

Dimostrazione: Abbiamo

$$\phi_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t(\alpha X+\beta)}\right) = e^{t\beta} E\left(e^{t\alpha X}\right).$$

(34)

$$\Rightarrow \phi_Y(t) = e^{t\beta} E\left(e^{t\alpha X}\right)$$
$$= e^{t\beta} E\left(e^{t_1 \cdot X}\right) \quad \text{con } t_1 = t\alpha$$
$$= e^{t\beta} \phi_X(t_1)$$
$$= e^{t\beta} \phi_X(\alpha t).$$
$$= \exp\left[\underbrace{(\alpha\mu + \beta)}_{=E(Y)} t + \frac{\overbrace{\alpha^2\sigma^2}^{Var(Y) =}}{2} t^2\right].$$

$$Y \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2).$$

Somma di variabili aleatorie normali

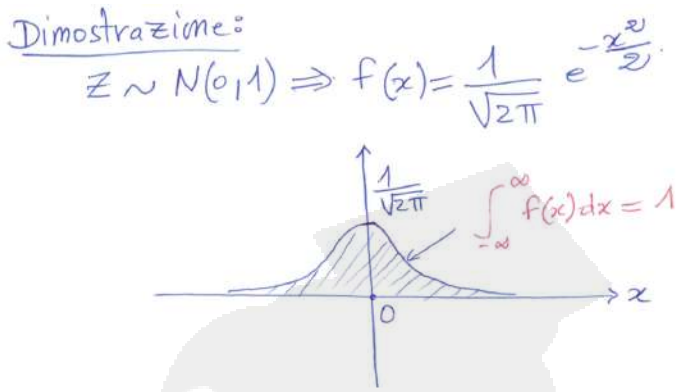
La **somma** di variabili aleatorie con distribuzione normale è **una variabile aleatoria** con distribuzione normale (senza ipotesi di indipendenza).

Variabile aleatoria normale standard

$$\text{Se } X \sim N(0,1)$$

Funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



Funzione di ripartizione

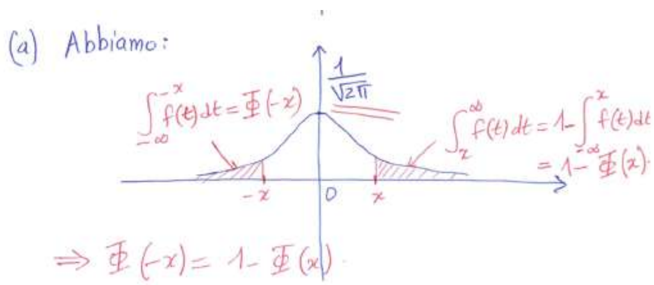
$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Proposizione:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ dove Φ è la funzione di ripartizione ($Z \sim N(0,1)$). Allora si ha:

1. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

    ▼ Dimostrazione

---

2. $P(\alpha < Z < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ Per ogni $\alpha < \beta$

▼ Dimostrazione

$$\underbrace{P(\alpha < Z \leq \beta)}_{= P(\alpha < Z < \beta)} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

3. $P(a < X < b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ Per ogni $a < b$

▼ Dimostrazione

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \overbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}^{= Z \sim N(0,1)} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Come conseguenza dei punti 1 e 2, si ha che, se $Z \sim N(0,1) \quad x > 0$

$$P(-x < Z < x) = 2\Phi(x) - 1$$

▼ Dimostrazione

$$P(-x < Z < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$$

▼ Esempio

Esempio. Sia $X \sim \mathcal{N}(2, 25)$. Allora

$\sigma^2 \Rightarrow \sigma = 5$

$$\begin{aligned} P(0 < X < 10) &= \Phi(\frac{10-2}{5}) - \Phi(\frac{0-2}{5}) \\ &= \Phi(1.6) - \Phi(-0.4) \\ &= \Phi(1.6) - (1 - \Phi(0.4)) \\ &= 0.945 - (1 - 0.655)) = 0.6 \\ P(-8 < X < 1) &= \Phi(\frac{1-2}{5}) - \Phi(\frac{-8-2}{5}) \\ &= \Phi(-0.2) - \Phi(-2) \\ &= (1 - 0.579) - (1 - 0.977) = 0.398 \end{aligned}$$

I valori di $\Phi(1.6)$, $\Phi(-0.2) = 1 - \Phi(0.2)$ e $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$ si trovano nella seguente tabella:

▼ Esempio 2

La deviazione standard di una popolazione normale è 10. Si estrae un campione di 50 dati da questa popolazione e si vuole calcolare un intervallo al 95% di confidenza per la media della popolazione. A tale scopo si userà:

La tabella dei quantili della distribuzione normale standard, perchè la varianza della popolazione è nota.

Se X **non** è una variabile aleatoria normale standard $\mu = 0, \sigma^2 = 1$, bisogna **standardizzarla** calcolando il valore di Z

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$(Z \sim N(0,1))$$

E quindi ora possiamo utilizzare la tabella di ripartizione.

▼ Esempio

$$X \sim N(1, 3)$$
$$P(X > 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \Phi(Z)$$

Essendo X una variabile normale **non standard**, allora calcoliamo Z

$$Z = \frac{1-1}{\sqrt{3}} = 0$$
$$P(X > 1) = 1 - \Phi(Z) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

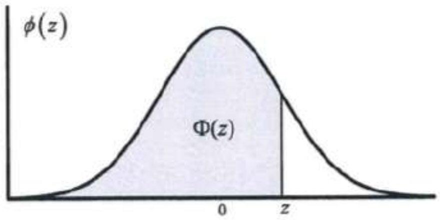
Tabella funzione di ripartizione della variabile normale standardizzata

Dove le righe indicano il punto del quale vogliamo conoscere il valore della funzione di ripartizione e le colonne indicano $\Phi(x + colonna)$ → 2° colonna = $\Phi(x + 0.02)$

$\Phi(z) =$ area sotto la curva fino a $z = 1$

Tavola 1 – Funzione di ripartizione della variabile casuale normale standardizzata

$N(0,1)$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Esempio lettura dati dalla tabella

- il valore di $\Phi(0.2) = 0.579$
- Il valore di $\Phi(2.52) = 0.9941$

Generalizzazione a più variabili della variabile aleatoria normale

Se $X_1, \dots, X_n$ sono n variabili aleatorie normali indipendenti

$$(X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2))$$

$$\text{allora } \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\overrightarrow{\mu}, \overrightarrow{\sigma}^2) \text{ con}$$
$$\begin{cases} \overrightarrow{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \\ \overrightarrow{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \end{cases}$$

▼ Dimostrazione

Dimostrazione: La funzione generatrice di $\sum_{i=1}^{n} X_i$ è:

$$\phi(t) = E\left(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}\right).$$
$$= E\left(e^{tX_1} \cdots e^{tX_n}\right)$$
$$= E\left(e^{tX_1}\right) \cdots E\left(e^{tX_n}\right)$$ perché $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}\right)$$
$$= \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \mu_i t + \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 t^2}{2}\right]$$
$$= \exp\left(\bar{\mu} t + \frac{\bar{\sigma}^2 t^2}{2}\right).$$

↑ è la funzione generatrice di $N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$.

$$aX_1 + bX_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

Variabile aleatoria t di Student

É una distribuzione di probabilità continua che governa il **rapporto tra due variabili aleatorie**, la **prima** con **distribuzione normale** e la **seconda**, al quadrato, segue una **distribuzione chi quadrato**.

Questa distribuzione interviene nella **stima della media di una popolazione che segue la distribuzione normale**, e viene utilizzata negli omonimi **test t di Student** per la **significatività** e per ogni intervallo di **confidenza** della **differenza tra due medie.**

La funzione Gamma è definita da

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad \alpha > 0$$

Una variabile aleatoria continua T_n si dice t **di student** con n **gradi di libertà**

$$(T_n \sim t_n) \text{ se ha funzione di densità data da}$$

Funzione di densità

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^{(\frac{n+1}{2})}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

La curva di f ammette $x = 0$ come asse di simmetria.

Osservazione:

1. $f(-x) = f(x) \qquad (x = 0$ è un asse di simmetria$)$

$$\begin{aligned} F_{T_n}(-t) = P(T_n < -t) = \int_{-\infty}^{-t} f(x)dx \\ = \int_t^\infty f(x)dx \qquad y = -x \\ 1 - F_{T_n}(t) \to \text{Funzione di ripartizione} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{T_n}(-t) = 1 - F_{T_n}(t)$$

2. Abbiamo $P(a < T_n < b) = F_{T_n}(b) - F_{T_n}(a)$

3. Per ogni $a > 0$

$$P(-a < T_n < a) = F_{T_n}(a) - F_{T_n}(-a) = F_{T_n}(a) - [1 - F_{T_n}(a)] = 2F_{T_n}(a) - 1$$

$$P(-a < T_n < a) = 2F_{T_n}(a) - 1$$

Valore atteso, varianza

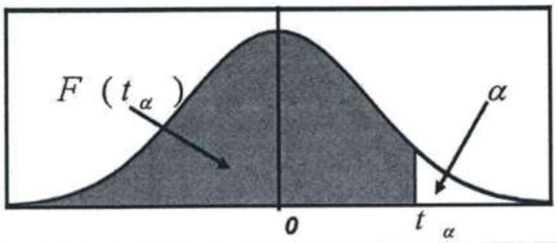
$n \rightarrow$ gradi di libertà.

- $E(X) = 0$ se $n > 1$, non definita altrimenti.
- $Var = \frac{n}{n-2}$ se $n > 2$, non definita altrimenti.
- **Mediana** $= 0$
- **Moda** $= 0$

Tabella t di Student

$$F(t_\alpha) = 1 - \alpha$$

t di Student



F(tα) / gr.lib.	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
31	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744	3,375	3,633
32	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
33	0,530	0,682	0,853	1,053	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733	3,356	3,611
34	0,529	0,682	0,852	1,052	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
35	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591
36	0,529	0,681	0,852	1,052	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
37	0,529	0,681	0,851	1,051	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715	3,326	3,574
38	0,529	0,681	0,851	1,051	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
39	0,529	0,681	0,851	1,050	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708	3,313	3,558
40	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
80	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
120	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
160	0,525	0,676	0,844	1,040	1,287	1,654	1,975	2,350	2,607	3,142	3,352
200	0,525	0,676	0,843	1,039	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
∞	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Esempio lettura dati dalla tabella

- $F_{T_3}(0.765) = 0.750$ → dove **3 sono i gradi di libertà** e 0.765 è il valore del quale vogliamo conoscere il valore della **funzione t di Student**.

- $F_{T_2}(0.816) = 0.750$ → dove **2 sono i gradi di libertà** e 0.816 è il valore del quale vogliamo conoscere il valore della **funzione t di Student.**

Il **t-test** per la verifica d'ipotesi sulla media di una popolazione Gaussiana si usa quando la varianza in una popolazione gaussiana è incognita.
