Formulario Probabilità

Reimmissione → indipendenti

$\cap$ → equivale alla lettera "*e*"

$\cup$ → equivale alla lettera "*o*"

Implica → $\subseteq$

al più → $\leq$ → al massimo → $A \cap (B^c \cap C^c) \cup B \cap (A^c \cap C^c) \cup \cdots \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

almeno → minimo → $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

solo A → $(A \cap B^C)$

---

1. Si verifica A	1. A
2. Si verifica *soltanto* A → *solo*	2. $A \cap B^c \cap C^c = A \cap (B \cup C)^c = A \backslash (B \cup C)$
3. *Tutti* e tre si verificano	3. $A \cap B \cap C$
4. *Nessuno dei tre si verifica*	4. $A^c \cap B^c \cap C^c$
5. Si verifica *soltanto uno* dei tre eventi	5. $(A \cap (B^c \cap C^c)) \cup (B \cap (A^c \cap C^c)) \cup (C \cap (B^c \cap A^c))$
6. Si verificano *esattamente due* eventi su tre	6. $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) = (A \cap B \backslash C) \cup (A \cap C \backslash B) \cup (B \cap C \backslash A)$
7. Si verifica *al più uno* dei tre eventi	7. Punto 5 $\cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$
8. Si verificano *almeno due* eventi su tre	8.$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cap (B \cap C)$
9. Si verificano *almeno uno* dei tre eventi	9.$A \cup B \cup C$

---

1. A *implica* B	1. $A \subseteq B$
2. A *implica* sia B che C	2. $A \subseteq B \cap C$
3. A non può verificarsi se si verifica almeno uno tra B o C	3. $A \subseteq (B \cup C)^c$ oppure $B \cup C \subseteq A^c$
4. A può verificarsi solo a condizione che non si verifichino né B né C	4. $A \subseteq B^c \cap C^c$
	5. $A = B^c \cap C^c$

5. A si verifica se e solo se non si verificano né B né C

ASSIOMI

P è una probabilità se P soddisfa i tre seguenti assiomi:

1. $0 \leq P_{(A)} \leq 1$; Per ogni evento A
2. $P_{(S)} = 1$
3. Per ogni successione di eventi disgiunti $A_1, ..., A_n \rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset, \forall_i \neq j)$, abbiamo $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i); n = 1, 2, 3, ..., n$ → La probabilità è pari alla somma delle probabilità.

🤯 Un evento **disgiunto** è un evento diverso da un altro: $A = \{TC, CT\}$, TC e CT sono **disgiunti,** cioè $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall \quad i \neq j \text{ con } i, j \in \{1, 2, .., n\})$.

---

1. Proposizioni:

1. $(A^c)^c = A$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Se $A \subset S$, $\overline{A} = A^c = S \backslash A$ → complementare

$S \backslash A = S - A$

Sensibilità = "*probabilità che un infetto sia positivo*"

Specificità = "*Probabilità che una persona sana sia negativa*"

Probabilità

- N è il numero di elementi
- p corrisponde alla probabilità di ogni elemento

$p = \frac{1}{N}$ e $P(1) = P(2) = ... = P(N) = \frac{1}{N}$

$$P(A) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{\#A}{\#S}$$

$A \cup B \supset A \Rightarrow P(A \cup B)$

2. Proposizioni

1. Per ogni evento A $\qquad P(A^c) = 1 - P(A)$
2. Se $A \subset B$ $\qquad P(B|A) = P(B) - P(A) \qquad$ e $P(A) \leq P(B)$
3. Per tutti i due eventi A e B $\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $P(A \backslash B) = P(A^c \cap B)$
- $P(A \cap B) = A \backslash (A \backslash B)$

Proposizioni esame

- $P(A \backslash C) \geq P(C)$
- $P(A \cup B) \geq P(B)$
- $P(A \cap B) \leq P(B)$
- $P(A \cap B) \geq P(B) - P(A)$

---

3. Proposizioni

- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b)$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

Proprietà funzione di probabilità

$H \rightarrow$ evento condizionante

- $P(\Omega|H) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(A|H) \leq P(B|H)$
- $P(A^c|H) = 1 - P(A|H)$
- $P(A \cup B|H) = P(A|H) + P(B|H) - P(A \cap B|H)$

Indipendenza

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ → Verificare se 2 eventi non si influenzano l'un l'altro.

Eventi incompatibili

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cap B) = 0$

Principio di enumerazione

$\boxed{m * n}$ → Se si considerano 2 esperimenti contemporaneamente, che possono avere rispettivamente m e n esiti differenti. Allora vi sono m*n diversi risultati.

Formule fondamentali

n° di parole	Con ordinamento	Senza ordinamento
con ripetizioni	N^n → disposizioni	$\binom{N+n-1}{n}$
senza ripetizioni	$\frac{N!}{(N-n)!}$	$\binom{N}{n}$

Combinatoria

Nome Matematico	A Cosa Serve	Come si conta?
Permutazione di n oggetti	Contare in quanti modi si possono ordinare n oggetti	$n! = n(n-1)...3 * 2 * 1$
Numero di combinazioni di n elementi, presi k alla volta	Scegliere k oggetti tra n → determinare il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono formare partendo da n elementi	$\binom{n}{k}$
Disposizioni semplici di n elementi presi k alla volta	Scegliere e contare in quanti modi ordinare k oggetti tra n	$\frac{n!}{(n-k)!} \rightarrow \binom{n}{k} k!$
Untitled		

▼ Esempio pallina con reinserimento

In un urna ci sono 30 palline di cui 10 rosse, 7 nere, 4 viola e le restanti gialle

a) Qual è la probabilità che su 6 estrazioni con reinserimento si ottengano tutte palline nere?

$$p = \frac{7}{30}$$

$$P(A) = \left(\frac{7}{30}\right)^6 \rightarrow p^{\text{numero di estrazioni}}$$

b) Qual è la probabilità che su 6 estrazioni con reinserimento non si ottenga alcuna pallina nera?

$$1 - p = \frac{23}{30}$$
$$P(B) = \left(\frac{23}{30}\right)^6$$

c) Qual è la probabilità che si ottenga almeno una pallina nera?

$$P(C) = 1 - P(B)$$

Stai cercando la probabilità che almeno una sia nera...ovvero ciò è l'esatto contrario di cercare il fatto che nessuna è nera. Infatti se nessuna è nera escono tutte palline diverse da quelle nere...mentre se "almeno una è nera" hai che ne può uscire una sola, due, tre, quattro, cinque, o sei...ma MAI nessuna...infatti se non ne uscisse nessuna nera...ti troveresti nella condizione precedente...ovvero ti troveresti con $P(B)$. Quindi la probabilità che almeno una sia nera è data da $1 - P(B)$.

Probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- $P((A) \cap (B))$ → è la probabilità congiunta dei due eventi, ovvero la probabilità che si verifichino entrambi

Se due eventi sono **indipendenti**:

$$P(A|B) = P(A)$$

Regola della moltiplicazione

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Formula della probabilità totale - Regola della catena

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

Si applica quando ci sono due eventi e il secondo dipende dal primo. In particolare se B e B^c sono due sottoinsiemi non vuoti, allora B, B^c è una partizione di S. In questo caso la formula della probabilità totale si scrive:

$$\boxed{P(A) = P(A|B) * P(B) + P(A|B^c) * P(B^c)} \to \text{Formula della probabilità totale}$$

$$P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(B^c) - P(A \cap B^c)}{P(B^c)} =$$
$$= 1 - \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = 1 - P(A|B^c)$$

Formula di Bayes

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n) * P(B_n)}{P(A)}$$

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n) * P(B_n)}{P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

In particolare se B e B^c sono una partizione di S, la formula di Bayes si scrive:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

$$P(B^c|A) = \frac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A|B^c)P(B^c) + P(A|B)P(B)}$$

Normalizzazione

K → costante di proporzionalità.

$$P(x) = Kx(x = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$
$$1 = \sum_{x=1}^{6} P(x) = \sum_{x=1}^{6} Kx = 21K \to K = \frac{1}{21}$$