Formulario Serie

Calcola la somma di infiniti numeri. $S_k \rightarrow$ parziale, $\sum$ → serie

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

Limite:

$$\lim_{k \to +\infty} S_k :$$

- $\exists$ finito = S, la $\sum$ converge
- $\exists\ \infty = \pm\infty$, la $\sum$ diverge
- $\nexists$ → la serie è irregolare o oscillante

Esempio: Serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + ... + q^n$$

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = 1 + q + q^2 + .. + q^k = \begin{cases} k+1 \rightarrow q = 1 \\ \frac{1}{1-q} \rightarrow q < 1 \\ \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \rightarrow q \neq 1 \end{cases}$$

Limite:

$$\lim_{k \to +\infty} S_k$$

- $+\infty$ se $q \geq 1$, diverge
- $\frac{1}{1-q}$ se $-1 < q < 1 \rightarrow |q| < 1$, converge
- $\nexists$ se $q \leq -1$, non esiste

▼ Dimostrazione $q \neq 1$

$$Se \quad q \neq 1 \rightarrow (1 + q + q^2 + .. + q^k)(1-q) = 1 - q^{k+1}$$

Dividiamo tutto per $(1-q)$, così ci rimane la serie = $\frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

$$\sum_{n=o}^{k} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

Esempio: Serie di Mengoli, serie telescopiche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ...$$

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} \frac{1}{(n+1)}$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{k}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = (1 - \cancel{\frac{1}{2}}) + (\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}) + (\cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k \to \infty} S_k = 1 \rightarrow converge$$

Teorema condizione necessaria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad converge \Rightarrow a_n \rightarrow^{tende} 0$$

$$\not\Leftarrow$$

La condizione necessaria affinché una serie converga è che il termine generale $a_n$tende a 0. Se gli $a_n$tendono a 0, non è detto che la serie converga (*non vale il viceversa*).

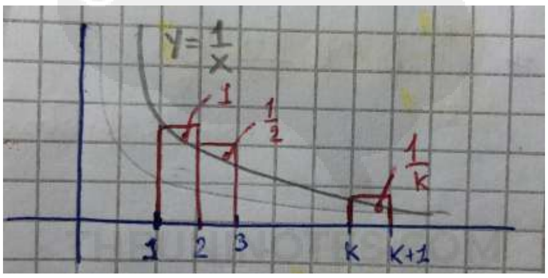
Esempio: Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... \quad diverge$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + = \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} \geq \int_{1}^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\int_{1}^{k+1} \frac{1}{x} dx = ln(k+1) - ln1 = ln(k+1)$$

$S_k \rightarrow$ area rettangoli, divergerà per confronto, poiché $S_k \geq ln(k+1)$ il quale tende ad ∞



▼ Dimostrazione

$\exists$ finito $lim_{k \to +\infty} S_k = S \qquad lim_{k \to +\infty} S_{k+1} = S$, limite = S (*un valore*).

$$lim_{k \to +\infty}(S_{k+1} - S_k) = 0 \quad lim_{k \to +\infty} a_{k+1} = 0 \quad \sum_{n=1}^{k+1} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n = a_k + 1$$

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} converge \rightarrow \alpha > 1 \\ diverge \rightarrow \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Se $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ non converge. (*Se a_n non tendono a 0, la serie non converge*)

Serie a termini positivi

$a_n \geq 0$ o convergono o divergono. $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} \geq S_k : S_k$ è monotona (teorema di monotonia).

Proprietà → una $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$ non può essere irregolare.

Esempio: da $\sum(cos n)^2$ diverge (i singoli a_n oscillano tra 0 e 1, non la serie).

- $a_n \geq 0$, la serie a termini positivi (non può essere irregolare).
- $a_n \not\to 0$, la serie NON converge.

Criteri di convergenza

Criterio del confronto $a_n, b_n \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad 0 \leq a_n \leq b_n$$

Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

▼ Dimostrazione

$$A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \qquad B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n \qquad A_k \leq B_k (sono \quad monotone)$$

$$\lim A_k \leq \lim B_k$$

Oss. il criterio è valido anche se $a_n \leq b_n$ solo definitivamente

▼ Esempio

$$\sum \frac{2 + cos n}{3n^2} \qquad \sum \frac{2 + cos n}{3n^2} \leq \frac{3}{3n^2} = \frac{1}{n^2}$$

Converge poiché $\alpha > 1$, per il criterio del confronto, converge anche la serie di partenza.

🤯 $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Criterio del confronto asintotico $\sum a_n, \sum b_n \quad a_n, b_n \geq 0 \quad an \sim b_n$

$\sum a_n \quad \sum b_n$ hanno lo stesso carattere (*convergono o divergono entrambe*)

▼ Dimostrazione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \overrightarrow{n} : \forall n \geq \overrightarrow{n} \quad |\frac{a_n}{b_n} - 1| < \epsilon \quad \epsilon = \frac{1}{2}$$

$$\exists \overrightarrow{n} : |\frac{a_n}{b_n} - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow a_n < \frac{3}{2} b_n \quad a_n > \frac{1}{2} b_n \Rightarrow \frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$$

🤯 $\forall n \geq \overrightarrow{n} \rightarrow$ definitivamente

Se b_n converge, anche a_n converge

Se a_n diverge, anche b_n diverge

Criterio del rapporto $\sum a_n (a_n > 0)$

$$a^{n+1} = a^n a$$
$$(n+1)! = n!(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} :$$

- $\nexists$ il criterio **NON si applica**
- > 1 la serie diverge
- $= 1$? $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge → il lim del rapporto è 1, ma **NON** ci dà info sulla serie
- $< 1 \in [0;1)$ la serie converge

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1^+ \Rightarrow \sum$ diverge

▼ Dimostrazione

$$\lim \frac{a_n+1}{a_n} = l < 1 \Rightarrow \sum converge$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \vec{n} : \forall n \geq \vec{n} | \frac{a_n+1}{a_n} - l| < \epsilon$$

$(l-\epsilon)a_n < a_n + 1 < (l+\epsilon)a_n$, scelgo $\epsilon : (l+\epsilon) = \gamma < 1, \forall n \geq \vec{n}$ (definitivamente) $a_n + 1 < \gamma a_n$
$a_n + 1 < \gamma a_{\vec{n}} \quad a_{\vec{n}} + 2 < \gamma a_{\vec{n}} + 1 < \gamma^2 a_{\vec{n}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\sum_{n=1}^{\vec{n}-1} + \sum_{n=\vec{n}}^{\infty}) = numero + \sum_{m=0}^{\infty} a_{\vec{n}} + m \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m a_{\vec{n}} = a_{\vec{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \to q = \gamma < 1 \to converge$$

Converge per confronto

▼ Dimostrazione youmath

Criterio del rapporto per serie numeriche, dimostrazione
Ciao a tutti :) Qualcuno può aiutarmi con il criterio del rapporto per serie numeriche? In particolare, mi interesserebbe la dimostrazione del criterio del rapporto. Grazie in anticipo
https://www.youmath.it/forum/analisi-1/12334-criterio-del-rapporto-per-serie-numeriche-dimostrazione.html

▼ Esempio

$$\sum \frac{n!}{n^n} a_n \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{\cancel{n}!}$$

$$\lim (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{e} < 1 \to converge$$

Criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} :$$

- > 1 la $\sum$ diverge
- $= 1$? caso dubbio
- < 1 la $\sum$ converge

Se $\nexists \lim \sqrt[n]{a_n}$, ma lim sup $\sqrt[n]{a_n} < 1$ la serie converge.

Esempio *lim sup e lim inf*: $lim_{n\to\infty} sinn =$ lim sup = 1, lim inf = -1

Esempio: $\sum(1-\frac{3}{n})^{n^2} \rightarrow lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt[n]{a_n} = lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt[n]{(1-\frac{3}{n})^{n^2}} = lim_{n\rightarrow\infty}(1-\frac{3}{n})^n = \frac{1}{e^3} < 1, la \sum$ converge.

Serie a segno qualsiasi

Se il $lim_{k\rightarrow\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n$ esiste finito, la serie **converge semplicemente**

Se il $lim_{k\rightarrow\infty}\sum_{n=1}^{k} |a_n|$ esiste finito, la serie **converge assolutamente**

Teorema: Se $\sum a_n$ converge assolutamente $\Rightarrow \sum a_n$ converge semplicemente

Se $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

▼ Esempio:

$$\sum \frac{sinn}{n^2} \qquad \sum|\frac{sinn}{n^2}| \qquad |\frac{sinn}{n^2}| < \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n^2} \rightarrow converge$$

Quindi converge anche la serie di partenza

Serie a segni alterni (Serie di Leibniz)

$$Se \quad a < 0 \Rightarrow a = (-1)|a|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 ... \qquad (b_n > 0)$$

Teorema di Leibniz

$$Se \begin{cases} b_n \rightarrow 0 \\ \forall n \quad b_n + 1 < bn \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{matrix} \sum(-1)^n b_n \rightarrow converge \quad semplicemente \\ |\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n - \sum_{n=0}^{k}(-1)^n b_n| < b_k + 1 \end{matrix}$$

▼ Esempio 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Soddisfa il teorema di Leibniz, *converge semplicemente*.

$$\sum_{n=0}^{\infty}|(-1)^n \frac{1}{n+1}| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Diverge assolutamente.

▼ Esempio 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3+n} \qquad \sum|a_n| = \sum \frac{1}{n^3+n} \qquad \frac{1}{n^3+n} \sim \frac{1}{n^3}$$

$$\sum \frac{1}{n^3} \rightarrow converge$$

La serie di partenza converge assolutamente e di conseguenza anche semplicemente.

Determinare la somma con un valore $< 10^{-2}$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3+n}-\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{1}{n^3+n}\right|<10^{-2}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3+n}-\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{1}{n^3+n}\right|<b_{k+1}<10^{-2}$$

$$b_{k+1}=\frac{1}{(k+1)^3+(k+1)}$$

Troviamo un valore di k per il quale b_{k+1} sia minore di 10^{-2}

$$k=3 \quad b_{k+1}=\frac{1}{68} \quad NO$$
$$k=4 \quad b_{k+1}=\frac{1}{130}<10^{-2} \quad SI$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3+n}\simeq\sum_{n=1}^{4}(-1)^n\frac{1}{n^3+n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{1}{30}+\frac{1}{68}$$

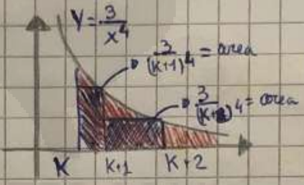
▼ Esempio 3:

E: $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}} \to \frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}<\frac{3}{m^4}$ $\quad \sum\frac{3}{m^4}=3\sum\frac{1}{m^4}$ converge, quindi la serie converge

Determinare il valore con errore $<10^{-3}$

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}-\sum_{m=1}^{K}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}\right|=\sum_{m=K+1}^{\infty}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}<\ldots<10^{-3}$$

$$\sum_{m=K+1}^{\infty}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}<\sum_{m=K+1}^{\infty}\frac{3}{m^4}=\frac{3}{(K+1)^4}+\frac{3}{(K+2)^4}+\ldots$$



$$\leq\int_K^{+\infty}\frac{3}{x^4}\,dx=\left.-\frac{1}{x^3}\right]_K^{+\infty}=\frac{1}{K^3}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}-\sum_{m=1}^{K}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}<\frac{1}{K^3}\leq 10^{-3}$$ è vero se $K\geq 10$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}\simeq\sum_{m=1}^{10}\frac{2+\sin m}{m^4+e^{-m}}$$ l'errore sarà $<10^{-3}$

Proprietà commutativa

- Se la $\sum$ converge **assolutamente**, vale la proprietà **commutativa:** a+b+c = c+b+a
- Se la $\sum$ converge **semplicemente,** ma non assolutamente, vale il Teorema di *Riemann-Dini*

Teorema di Riemann - Dini

Data la $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge semplicemente ma non assolutamente, $\forall\lambda\in\vec{\Re}\ \exists$ riordinamento degli a_n tale che la serie ordinata converge a $\lambda\to$ posso far convergere la sere a ciò che voglio

$a_n\to$ segno qualsiasi

$b_n\to a_n$ positivi

$c_n\to a_n$ negativi

$$b_n\geq 0\begin{cases}a_n\to a_n>0\\0\to an<0\end{cases}\qquad c_n\geq 0\begin{cases}0\to a_n>0\\a_n\to an<0\end{cases}$$

$$\sum |a_n| = \sum b_n + \sum -c_n \qquad diverge \qquad \begin{array}{l} \sum b_n = +\infty \\ \sum c_n = -\infty \end{array}$$

▼ Esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = ln2 = S \rightarrow converge \quad semplicemente$$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \rightarrow diverge \quad assolutamente$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$$

$$S + \frac{S}{2} = \frac{3}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} ...$$

$$ln2 + \frac{1}{2} ln2 = \frac{3}{2} ln2$$

Altri esempi e serie di Taylor

SERIE DI TAYLOR

34

$f \in \mathcal{C}^m(D) \quad \forall x \in D \qquad f^{(m)}$ = derivata K-esima

$f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ (dominio) $\quad x_0 \in D, \quad \exists\, (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \quad \left|\dfrac{f^{(m)}(x)}{m!}\right| \le M \leftarrow \exists M, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

$e^x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ definizione di esponenziale $\quad e^x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} + o(x^k)$

Serie di potenze centrata in x_0 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$. Le serie di Taylor sono particolari serie di potenze

$a_m = \dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ $\quad \forall$ serie di potenze esiste un numero R (raggio di convergenza per il quale si sa che la serie di potenze converge in $(x_0 - R; x_0 + R)$)

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \; ; \; Sh(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \; ; \; Ch(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \; ; \; \sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \; ; \; \cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!}$$

$\downarrow$

$R = +\infty$, convergono $\forall x \in \mathbb{R}$

$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m}$ $\quad R = 1$ $\qquad$ converge per ogni $x \in$ all'intorno di 1 possiamo usarlo per $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$, ma non per $\ln(1+3)$

$(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} x^m$ $\quad R = 1$

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{m=1}^{\infty} f_{(m)} x = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_m(x)$$

Il limite della serie è uguale alla serie del limite

$$\frac{d}{dx} \sum_{m=1}^{\infty} f_m x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(f_m x)$$

La derivata della serie è uguale alla serie della derivata

$$\int_a^b \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m x \, dx \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b f_m(x) \, dx$$

L'integrale della serie è la serie dell'integrale

vale solo per la serie di Taylor $\rightarrow$ in generale vale solo per le Σ di potenze se ci manteniamo all'interno dell'intorno $(x_0 - R; x_0 + R)$

$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1 \qquad \forall x \in (-1; 1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$ *

Tolgo $m=0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m x^m = \sum_{m=1}^{\infty} m x^m = x \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^m = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=1}^{\infty} x^m\right) = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m - 1\right)$$

$\hookrightarrow$ con $m = 0$, vale 0 $\qquad \hookrightarrow$ *

$$= x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = x \frac{1}{(1-x^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} m x^m = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Esempio $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$ (NON POSSIAMO FARLO NORMALMENTE) $\quad e^t = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \; ; \; e^{-x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!}$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!} \right) dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \underbrace{\int_0^1 x^{2m} dx}_{\frac{1}{2m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(2m+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320}$$

$\hookrightarrow$ l'errore è più piccolo di $\frac{1}{1320}$ (perché ci siamo fermati a $m=5$ quindi l'errore è più piccolo dell'ultimo termine)