Dinamica dei sistemi di punti materiali

Indice:

Corpo rigido:Non si considera la risultante delle forze interne, in questo sistema le forze interne non compiono lavoro. Ha 3 gradi di libertà (*traslazione*) per il moto del **centro di massa** e 3 gradi di libertà (*rotazione*).

Corpo non rigido: Le forze interne compiono lavoro (molla attaccata a due masse)

Grado di libertà: numero minimo di coordinate per descrivere completamente il moto.

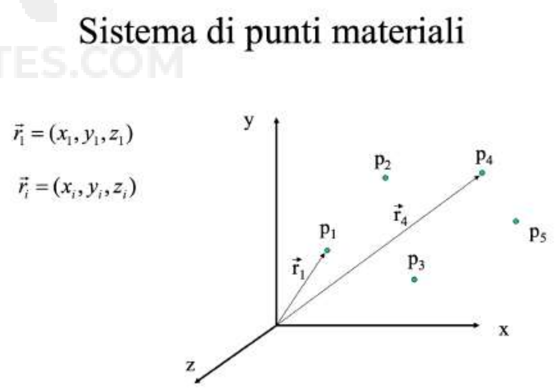
Punto materiale: siccome può solo traslare, ha 3 gradi di libertà.

Forze conservative: Forza peso, forza elastica

Forze non conservative: Forza d'attrito

Regola della mano destra: pollice = distanza, indice = forza, medio = direzione vettore.

Sono presenti **più** corpi in uno spazio. Un sistema di n punti materiali è un "**insieme**" di n elementi considerati **puntiformi**, cioè tali che, possono essere considerati come se fossero **punti**. A **ciascun** punto è **associata un'equazione** del moto per un totale di n equazioni vettoriali per n particelle. Ad ognuna corrispondono fino a 3 equazioni cartesiane.



Dal momento che nel moto le particelle si influenzano reciprocamente in ciascuna delle equazioni succitate compaiono incognite rappresentanti posizione o velocità di ciascun punto. Pertanto per risolverne una occorre risolvere l'intero sistema di equazioni.

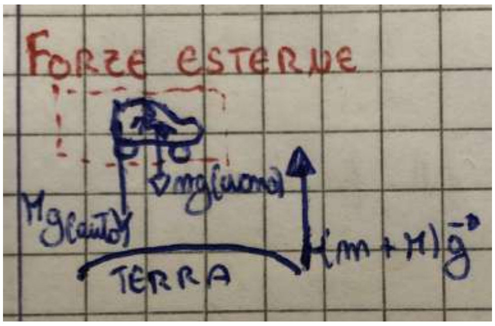
Forze interne: si sviluppano tra punti che appartengono all'insieme. Ogni punto ha masse ed accelerazioni diverse.

> Esse agiscono sulla congiungente dei due corpi, sono a coppie uguali e opposte (*principio di azione e reazione*), possono essere **attrattive** o **repulsive.**

Es:(**Forza gravitazionale**) $\overrightarrow{F_{2,1}} = -\overrightarrow{F_{1,2}}$ (La *forza* del corpo 2 che **agisce** sul corpo 1 = - *forza* del corpo 1 che agisce sul 2).

Risultante forze interne: $m\overrightarrow{a} = R^{(I)} = \sum_{i=1}^{n} F_i^I = 0$

Forze esterne: si sviluppano tra punti che **NON** appartengono all'insieme.



$\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_i^E} + \overrightarrow{F_i^I}$

Risultante: $\overrightarrow{R_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{i,n}^E} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{i,n}^I}$ → sul punto **i-esimo** (un singolo punto).

La forza interna $(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{i,n}^I})$ del singolo punto è diversa da 0. La **somma** delle forze interne su **tutti** i **punti** del sistema è 0. $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i^I} = 0$

L'interazione con *l'esterno* è **mediata** da alcune forze che agiscono tra i due sistemi.

Centro di massa del sistema di punti

$$\overrightarrow{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r}_i}{M_{TOT}}$$

La posizione del centro di massa in un sistema di punti, è data dalla **somma** delle **singole masse** per le **singole posizioni** dei punti, **fratto** la media pesata delle masse presenti nel sistema.

- $x_{CM} = \overrightarrow{r}_{CM} * ux = \overrightarrow{r}_{CM} cos\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$
- $y_{CM} = \overrightarrow{r}_{CM} * uy = \overrightarrow{r}_{CM} sin\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$
- $z_{CM} = \overrightarrow{r}_{CM} * uz = \overrightarrow{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$

$$\overrightarrow{r}_{CM} = \frac{m_1 \overrightarrow{r}_1 + m_2 \overrightarrow{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Velocità del centro di massa:

$$v_{CM} = \frac{d\overrightarrow{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r}_i}{M}\right) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P}_i}{M}$$

🤯 $\frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P}_i}{M}$ ← quantità di moto.

$\overrightarrow{P} = Mv_{CM}$ → la velocità di comporta come un **singolo** punto di massa M che si muove con velocità v_{CM}.

Velocità: $\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M}$ → quantità di moto / massa

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Accelerazione del centro di massa:

$$a_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{M}\right) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i}{M}$$

Accelerazione: $\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{R}^E}{M}$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

Teorema moto del centro di massa

Sistema di riferimento inerziale:

(non ci sono termini di accelerazioni apparenti). $m_i * \vec{a}_i = R_i^{(I)} + R_i^{(E)} = \vec{R}_i$

$$a_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i^{(I)} + \vec{R}_i^{(E)}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i^{(E)}}{M} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i^{(I)}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i^{(E)}}{M} \Rightarrow \frac{R_i^{(E)}}{M} = a_{CM}$$

Teorema: $R_i^{(E)} = a_{CM} * M$ (I equazione cardinale sistema di punti)

Accelerazione: $\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{R}^E}{M}$

→ se $\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{R}^E = 0 \Rightarrow \frac{dv_{CM}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} =$ costante

- Se $\vec{R}^E = 0$, si conserva la velocità del CM (conservazione velocità del centro di massa)
- Se $\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = 0 = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \Rightarrow \vec{r}_{CM}$ è costante. (conservazione posizione del centro di massa).

Quantità di moto del centro di massa

$$\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = costante$$

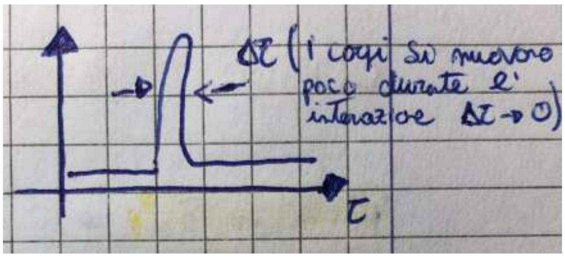
- Per qualsiasi urto in assenza di forze esterne, si **conserva** la quantità di moto del sistema

$$\vec{P}_{IN} = \vec{P}_{FIN} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

N.B:

$$\frac{\vec{P}_{IN}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} = \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}$$



A causa dell'esistenza delle forze impulsive, le quali interagiscono per un tempo molto breve, cambia la quantità di moto dei singoli punti.

$$\Delta p_1 = m_1 v_f - m_1 v_i = \overrightarrow{J}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}_{2,1} dt$$
$$\Delta p_2 = m_2 v_f - m_2 v_i = \overrightarrow{J}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}_{1,2} dt$$

$$\Delta \overrightarrow{P}_{CM} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{R}^E dt = \overrightarrow{J}_{CM} \simeq_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{R}^E \Delta t$$

🤯 $\overrightarrow{F}_{1,2}$ → forza generata da 1 agente su 2

In caso di **assenza** di forze esterne impulsive: $R^E = 0 \Rightarrow (\frac{dp}{dt} = R^E) = 0$

Teorema energia cinetica (sistema di punti)

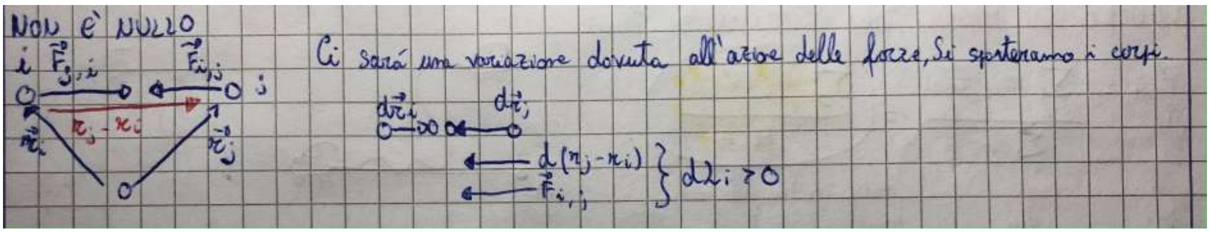
Per un singolo punto materiale, l' $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, $\Delta E_k = L_{tot} = L_{cons} + L_{non-cons}$

$dL_i = \overrightarrow{F}_i * d\overrightarrow{r}_i = \overrightarrow{F}_i^I * d\overrightarrow{r}_i + \overrightarrow{F}_i^E * d\overrightarrow{r}_i$

$dL = \overrightarrow{F}_i^I * d\overrightarrow{r}_i + \overrightarrow{F}_i^E * d\overrightarrow{r}_i \rightarrow dL^I + dL^E$

- $dL^E \rightarrow$ somma lavoro delle forze esterne (come calcolato fino ad ora)
- $dL_i^I = \overrightarrow{F}_{i,j} * d\overrightarrow{r}_j + \overrightarrow{F}_{j,i} * d\overrightarrow{r}_i = \overrightarrow{F}_{i,j} * d\overrightarrow{r}_j - \overrightarrow{F}_{i,j} * d\overrightarrow{r}_i = \overrightarrow{F}_{i,j}(d\overrightarrow{r}_j - d\overrightarrow{r}_i) = F_{i,j} d(\overrightarrow{r}_j - \overrightarrow{r}_i)$

🤯 $\overrightarrow{F}_{j,i}$ → forza generata da j agente su i



$F^I \rightarrow a_{CM}^I = 0 = \frac{\sum F_i^I}{M}$ le coppie di forze si annullano → $dL^I \neq 0$ in generale F_i^I fanno lavoro.

Teorema dell'energia cinetica per i sistemi di punti materiali

$$Lavoro \rightarrow L = L^E + L^I = \Delta E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{ifinale}^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{iiniziale}^2$$

$L^E \to$ conservative, non conservative.

$L^I \to$ conservative, non conservative.

$L_{cons} = -\Delta U$, $L^I_{cons} = -\Delta U^I$, $L^E_{cons} = -\Delta U^E$

$$\Delta E_k = L_{tot} = L_{cons} + L_{non-cons} \Rightarrow \Delta E_k + \Delta U = \Delta E_M \Rightarrow L_{non-cons} = L^I_{nc} + L^E_{nc}$$

Teorema energia meccanica

$$\Delta E_k + \Delta U^I + \Delta U^E \Rightarrow \Delta E_M = L^I_{non-cons} + L^E_{non-cons}$$

---

2. Teorema di Konig

- E_k' → **ognuno** dei **punti** ha un'energia aggiuntiva rispetto al centro di massa $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2$. v_i' → velocità del punto nel s.d.r del centro di massa.
- E_{kCM} → energia del centro di massa, mediamente il sistema si muove come M, v_{CM} → $\frac{1}{2}Mv_{CM}$

$$E_{kTOT} = E_k' + E_{k,CM}$$

▼ Dimostrazione

$$E_k = \sum\frac{1}{2}m_i v_i^2 \qquad v_i^2 = \vec{v_i} * \vec{v_i} \qquad \vec{v_i} = \vec{v}_{CM} + \vec{v_i'}$$

$$v_i^2 = \vec{v_i} * \vec{v_i} \Rightarrow (\vec{v}_{CM} + \vec{v_i'})(\vec{v}_{CM} + \vec{v_i'}) = v_i'^2 + 2\vec{v}_{CM} * v_i' + v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow E_k = \sum\frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \cancel{\sum\frac{1}{2}m_i 2\vec{v}_{CM} * v_i'} + \sum\frac{1}{2}m_i v_{CM}^2$$

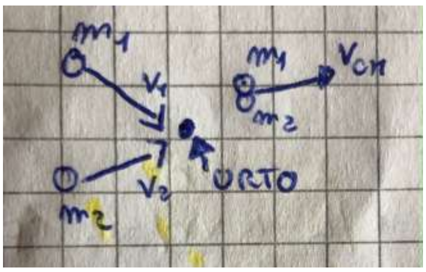
> 🤯 $\sum\frac{1}{2}m_i 2\vec{v}_{CM} * v_i'$ → 0 per definizione. $\sum m_i v'i = 0$

$$\Rightarrow E_k = E_k' + E_{k,CM}$$

Urto completamente anelastico

Dopo l'urto, i corpi rimangono attaccati. Si **conserva:**

- La quantità di moto del centro di massa → $\vec{P}_{IN} = \vec{P}_{FIN}$
- **NON** si conserva l'energia cinetica → $E_k^i \neq E_k^f$ (c'è una deformazione)



- 2 corpi prima dell'urto $(m_1, v_1)(m_2, v_2)$. La $v_{CM} = \frac{(m_1v_1)(m_2v_2)}{m_1+m_2}$
- 1 corpo dopo l'urto $(m_1 + m_2)$
- v_{CM} è la velocità finale.

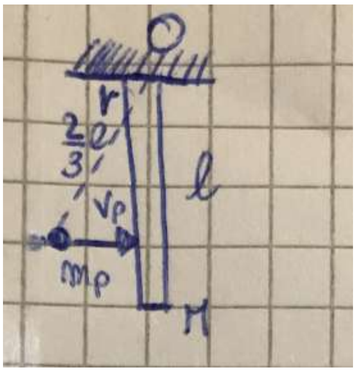
Conservazione quantità di moto: $v_{CM} = \frac{(m_1v_1)(m_2v_2)}{m_1+m_2}$ (trovare v_f dopo l'urto)

Energia cinetica: $E_{k,in} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 =_{Konig}\to E_k' + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2$

$E_{k,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_F^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2$

$E_{k,in} > E_{k,fin} \qquad \Delta E_k' < 0$ → **perde** energia

Esempio - Pendolo composto

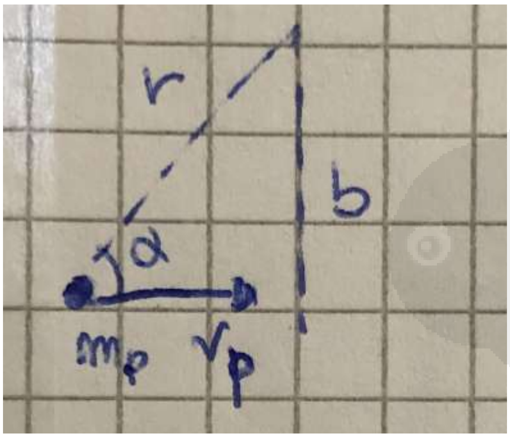


Nel punto **0**, le reazioni vincolari hanno **momento = 0**. Sono forze impulsive → (*forze intense che si manifestano al momento dell'urto*).

$\overrightarrow{M_0^E} = 0$ poiché il braccio è 0, quindi $rF\sin 180^\circ = 0$→ conservazione del momento angolare totale L_0 → $L \perp$ al piano.

> 🤯 Braccio: distanza punto-retta tra la direzione del vettore forza e il punto scelto

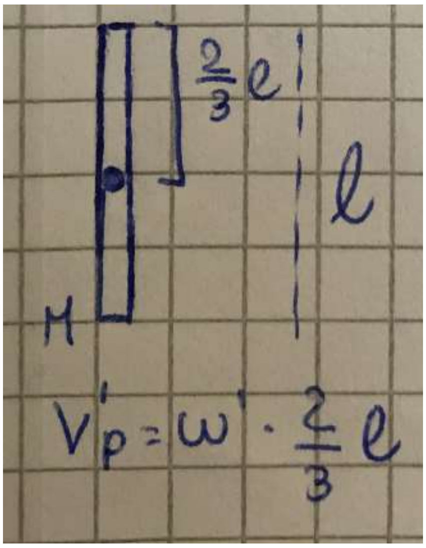
Prima dell'urto:



L prima dell'urto → $m_p v_p r \sin\alpha \Rightarrow m_p v_p \frac{2}{3} l$

> 🤯 $r \sin\alpha = \frac{2}{3} l$ → in base alla traccia

Dopo l'urto:



L dopo l'urto → $I\omega' = (I \text{ sbarra } + I \text{ proiettile})\omega'$

$$\Rightarrow (\frac{1}{3}Ml^2 + (m_p(\frac{2}{3}l)^2))\omega'$$

Siccome il momento angolare **prima** e **dopo** l'urto sono uguali: $L_{\text{prima}} = L_{\text{dopo}}$

$$\rightarrow m_p v_p \frac{2}{3}\cancel{l} = (\frac{1}{3}M + \frac{4}{9}m_p)l^{\cancel{2}}\omega'$$

$$\omega' = \frac{m_p v_p \frac{2}{3}}{\frac{3M+4m_p}{9} l} \rightarrow \omega' = \frac{6 m_p v_p}{(3M + 4m_p)l}$$

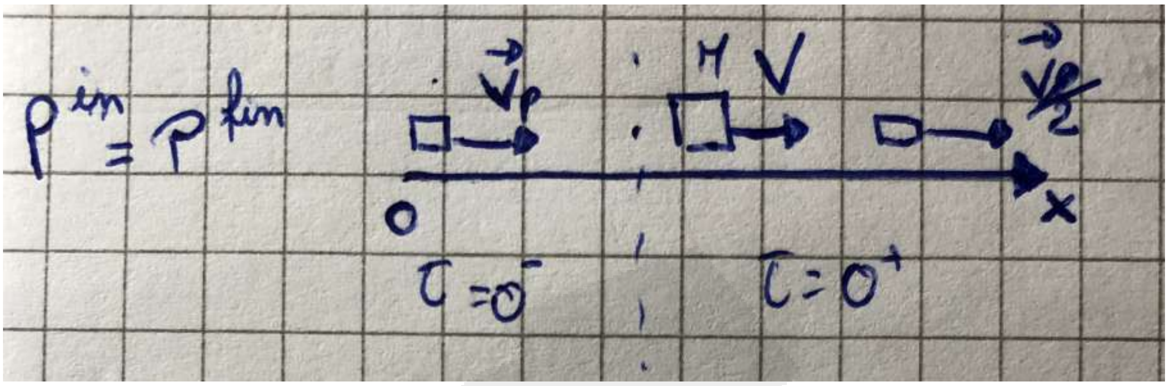
Urto non completamente anelastico

Si conserva solamente la quantità di moto del sistema, l'energia cinetica **NON** si conserva. $E_k^{fin} < E_k^{in}$. I due corpi **NON** rimangono attaccati dopo l'urto.

Si conserva

$$\text{Si conserva } \vec{P} : \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{R}^E \begin{cases} \cancel{\text{impulsive}} \\ \text{non impulsive} \end{cases} = 0$$

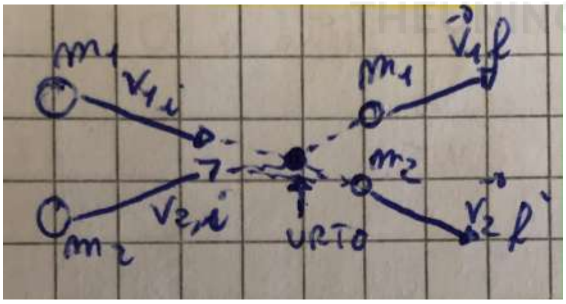
▼ Esempio:



$$m\vec{v}_p = M\vec{V} + m\frac{\vec{v}_p}{2} \Rightarrow m(\vec{v}_p - \frac{\vec{v}_p}{2}) = M\vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m}{M}\frac{1}{2}\vec{v}_p$$

🤯 $\vec{V} \rightarrow$ velocità di partenza del blocco

Urto elastico

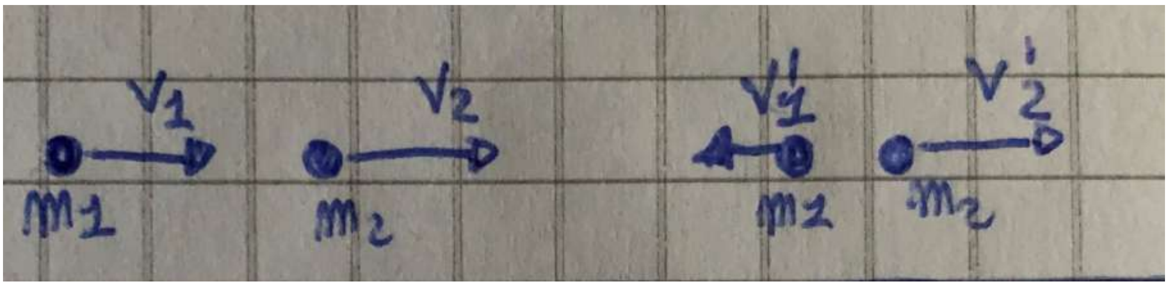


Si conserva sia la quantità di moto $\vec{P}$, sia l'energia cinetica E_k

$\vec{P}_{IN} = \vec{P}_{FIN} = \vec{P}_{CM}$

$E_{kIN} = E_{kFIN}$

▼ Dimostrazione



$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' & \text{conservazione q.tà di moto} \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 & \text{conservazione energia cinetica} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2 - v_2') & \mathrm{I} \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2) & \mathrm{II} \end{cases} \Rightarrow \text{Divido la } \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m_1(v_1 - v_1')}(v_1 + v_1')}{\cancel{m_1(v_1 - v_1')}} = \frac{\cancel{m_2(v_2 - v_2')}(v_2 + v_2')}{\cancel{m_2(v_2 - v_2')}}$$

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \longrightarrow v_2' = v_1' + v_1 - v_2$$

Inserisco l'equazione sopra, nell'equazione I della quantità di moto

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_1' + m_2v_1 - m_2v_2 \rightarrow$$
$$v_1' = \frac{m_1v_1 - m_2v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$
$$\Rightarrow v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Se } v_2 = 0 \Rightarrow v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

Se i corpi sono uguali, dopo l'urto essi si scambiano la velocità. Quello fermo prende la velocità del corpo in movimento e di conseguenza, il corpo che era in movimento, si ferma.

Momento di una forza → (Forza)

Equivalente alla forza rotazionale → *è un vettore* $(N * m)$ si misura in *Newton * metro*

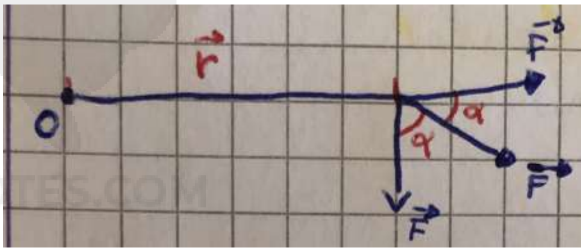
$\overrightarrow{M}_F = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} \Rightarrow M_F = rF\sin\alpha$

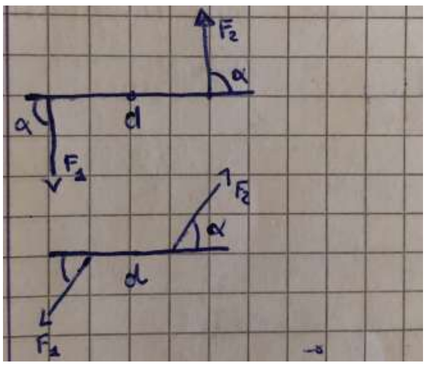
$M_F = \frac{dL}{dt}$

$M_F = I\alpha$

Forza tangenziale → $M_F = rF_t$

Anti commutativa → $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{r}$



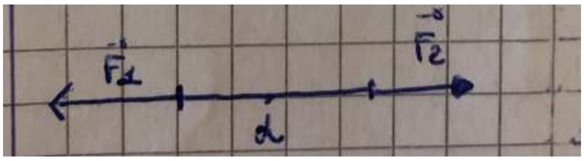


Coppie di forze:

$F_1 = F_2 = F$ (devono essere parallelamente opposte)

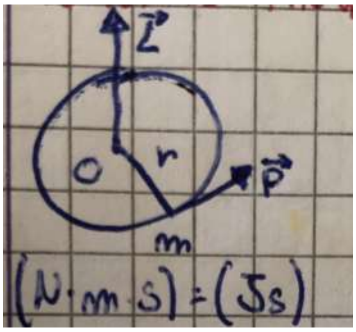
$M = Fd\sin\alpha$. (se sono **perpendicolari**, la F è massima)

Il momento di una forze è nullo se le forze sono parallele al raggio (*d*) in questo caso. Le forze centrali hanno tutte momento nullo $\overrightarrow{M} = 0$ rispetto al centro del campo (F elastica, F gravitazionale, F centripeta).



Momento angolare o momento quantità di moto

É l'equivalente della quantità di moto, per le rotazioni. ($\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v}$). Unità di misura $(N * m * s) = (J * s)$



$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{P}$ (nel caso di punto materiale, $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{P}$ sono perpendicolari

$L = m\omega r^2$

$L = mvr \to L = rP$

$L = I\omega$

$M_F = \frac{dL}{dt}$

Se su m agisce una forza tangenziale F_t, il momento di F_t rispetto a 0 è $M_F = rF_t$. Per la seconda legge della dinamica $F_t = ma_t \to rF_t = rma_t \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} \to rm\frac{dv}{dt} \to r\frac{dp}{dt} \to rF_t = r\frac{dp}{dt} \Rightarrow M_F = \frac{dL}{dt}$

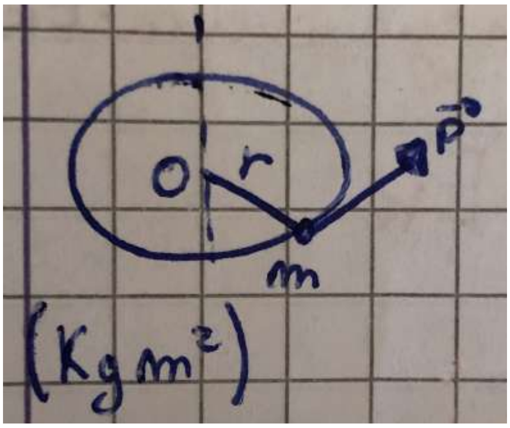
Risultante forze esterne: $R^E = \frac{d\overrightarrow{p}_{tot}}{dt}$ Momento risultante forze esterne: $\overrightarrow{M}^E = \frac{d\overrightarrow{L}_{tot}}{dt}$

Sistema di punti: $\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{n} P_i$ $\overrightarrow{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L}_i$

Corpo rigido: $\overrightarrow{P}_{TOT} = \int_{corpo} d\overrightarrow{p}$ $\overrightarrow{L}_{TOT} = \int_{corpo} d\overrightarrow{L}$

Momento d'inerzia → (massa)

É legato alla massa (indica la tendenza della massa a non farsi mettere in rotazione). Unità di misura $(Kg * m^2)$



$I = mr^2$ momento d'inerzia di m rispetto a 0

Sistema di punti: $I = \sum_{i}^{n} m_i r_i^2$

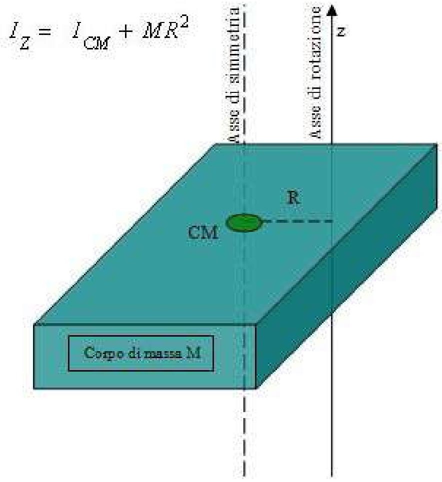
Corpo rigido: $I = \int dmr^2$

$M_F = I\alpha$

$L = I\omega$

Teorema degli assi paralleli - Teorema di Huygens-Steiner

Momento d'inerzia di un asse parallelo



L'asse è perpendicolare alla superficie del disco (va verso l'alto) (passa dentro al centro del disco)

$$I_z = I_{CM} + MR^2$$

> 🤯 I_z $\rightarrow$ momento d'inerzia rispetto al vecchio asse.

> 🤯 MR^2 $\rightarrow$(termine di traslazione) → $\text{massa} * \text{distanza}^2$ → distanza tra i due assi (zz')

Equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

$$1. \qquad R^E = \frac{dp_{tot}}{dt} \qquad (m * \overrightarrow{a}_{CM})$$

$\Rightarrow$ se $\overrightarrow{R}^E = 0 \rightarrow \overrightarrow{P}$ costante, si conserva.

▼ Dimostrazione

Considerando un sistema di N punti materiali $P_1, ..., P_N$ che formano un corpo, possiamo suddividere le forze attive agenti sul sistema in interne ed esterne, da indicarsi rispettivamente con $\vec{F^{(i)}}$ e $\vec{F^{(e)}}$. In modo analogo suddividiamo le reazioni vincolari in interne $\vec{\phi^{(i)}}$ ed esterne $\vec{\phi^{(e)}}$. Si può così scomporre il vettore risultante $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{F}^{(i)} + \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(i)} + \vec{\Phi}^{(e)} \tag{2.3}$$

Tuttavia per il principio 1.21, la risultante delle forze interne è nulla

$$\vec{R}^{(i)} = \vec{F}^{(i)} + \vec{\Phi}^{(i)} = 0. \tag{2.4}$$

Prendiamo ora in esame il vettore della quantità di moto totale del sistema

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_s \vec{v}_s.$$

Derivandolo rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{a}_s = \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{R}_s = \vec{R},$$

avendo indicato con $\vec{R}_s$ il vettore risultante delle forze agenti su P_s, $s = 1, ..., N$.

Principio 1.21 (Principio di azione e reazione). *Se su un punto A agisce una forza di vettore $\vec{F}$ da parte di un punto B, allora sul punto B agisce da parte di A una forza di vettore $-\vec{F}$ avente la stessa linea di azione, la retta AB.*

Questo postulato implica che, per quanto riguarda l'inseieme delle forze interne ad un sistema, si ha che:

$$\begin{cases} \vec{R}^{(i)} = 0 \\ \vec{\Omega}^{(i)} = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Ovvero il sistema delle forze interne del sistema ha risultante delle forze e momento nulli.

$$2. \qquad M^E = \frac{dL_{tot}}{dt}$$

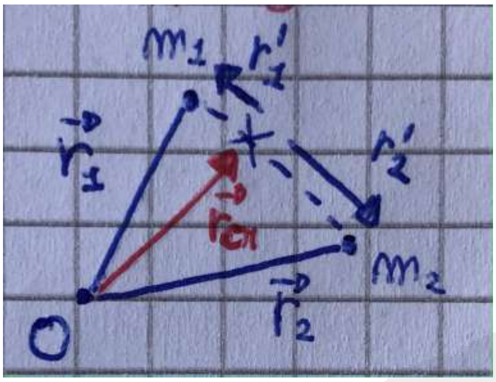
$\Rightarrow$ se $\overrightarrow{M}^E = 0 \rightarrow \overrightarrow{L}_{tot}$ costante, si conserva.

La conservazione dell'energia totale è garantita **solo** se forze esterne ed interne sono conservative

---

1. Teorema di Konig

Il momento angolare di un sistema qualsiasi è la somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa e del momento angolare del sistema riferito ad esso.



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_1$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_2$$

$$\vec{v}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{v}'_i \qquad \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$
$$\vec{L}'_i = \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$$

$$L_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i) \times m_i(\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}_{cm}) + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}'_i)$$

$$\vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} + \cancel{(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v}_{CM}} + \cancel{\vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}'_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{L}'_i \text{ rispetto a cm}$$

$$L_{tot} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} \vec{L}'_i$$

$$\Rightarrow L_{tot} = \vec{r}_{CM} \times P_{CM} + \sum_{i=1}^{n} \vec{L}'_i$$

$$\Rightarrow L_{tot} = \vec{L}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} \vec{L}'_i \quad \text{I teorema di Konig}$$

▼ Dimostrazione

$$\text{Sapendo che } m \vec{r}'_{CM} = \frac{\sum m_1 \vec{r}'_i}{\cancel{m}} \cancel{m} = 0$$

Poiché mi posiziono sul centro di massa, quindi la distanza è 0 e si annulla.

$$\text{Analogamente } m \vec{v}'_{CM} = \frac{\sum m_1 \vec{v}'_i}{\cancel{m}} \cancel{m} = 0$$

Traslazione, la quantità di moto è uguale a quella del centro di massa.

Rotazione, momento angolare totale non è uguale al momento angolare del centro di massa.

2. Teorema di Konig

- E_k' → **ognuno** dei **punti** ha un'energia aggiuntiva rispetto al centro di massa $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\overrightarrow{v}_i'^2$. v_i' → velocità del punto nel s.d.r del centro di massa.
- E_{kCM} → energia del centro di massa, mediamente il sistema si muove come M, v_{CM} → $\frac{1}{2}Mv_{CM}$

$$E_{kTOT} = E_k' + E_{k,CM}$$

▼ Dimostrazione

$$E_k = \sum\frac{1}{2}m_iv_i^2 \qquad v_i^2 = \overrightarrow{v_i} * \overrightarrow{v_i} \qquad \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v}_{CM} + \overrightarrow{v_i'}$$

$$v_i^2 = \overrightarrow{v_i} * \overrightarrow{v_i} \Rightarrow (\overrightarrow{v}_{CM} + \overrightarrow{v_i'})(\overrightarrow{v}_{CM} + \overrightarrow{v_i'}) = v_i'^2 + 2\overrightarrow{v}_{CM} * v_i' + v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow E_k = \sum\frac{1}{2}m_iv_i'^2 + \cancel{\sum\frac{1}{2}m_i2\overrightarrow{v}_{CM} * v_i'} + \sum\frac{1}{2}m_iv_{CM}^2$$

🤯 $\sum\frac{1}{2}m_i2\overrightarrow{v}_{CM} * v_i'$ → 0 per definizione. $\sum m_iv'i = 0$ (*vedi I teorema Konig*)

$$\Rightarrow E_k = E_k' + E_{k,CM}$$

Energia cinetica di rotazione

$$E_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\omega r)^2 = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2)\omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Lavoro

$$dw = dE_k = d(\frac{1}{2}I\omega^2) = I\omega d\omega = I\frac{d\Theta}{dt}\alpha dt = \tau d\Theta \to \tau \text{ indica l'asse di rotazione}$$

$$W = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\tau d\Theta \qquad W = \Delta E_k = \frac{1}{2}I\omega_{fin}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{in}^2$$

Se le forze **esterne** sono **conservative**: $W = -\Delta E_p \to E = \frac{1}{2}I\omega^2 + E_p$

Se l'asse di rotazione è a distanza *d*:

- $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + md^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega d)^2$
- Se le forze sono conservative: $E_k = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + E_{p'}$

Traslazioni

$$m$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{ds}{dt}$$

Rotazioni

$$I = mr^2$$

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{v}{r} = \frac{d\Theta}{dt}$$

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt} \quad and \quad a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

$$P = m\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{F} = \frac{dp}{dt}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\overrightarrow{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{d^2\Theta}{dt^2} \rightarrow \alpha = \frac{a_t}{r}$$

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p}$$

$$M_F = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

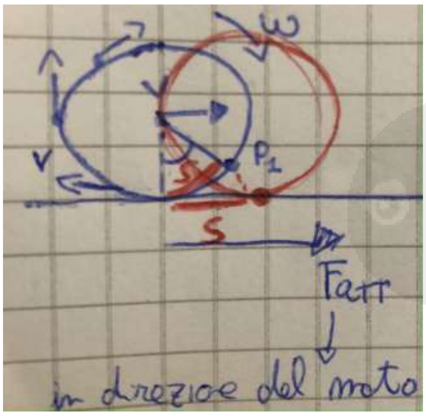
$$M_F = \frac{dL}{dt}$$

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

1. $R^E = \dfrac{dp_{tot}}{dt}$
2. $M^E = \dfrac{dL_{tot}}{dt}$

Moto di rotolamento senza strisciamento



$V_{CM} = v_{p1} = \omega r$ (tutti i punti hanno la stessa velocità)

$S = v_{p1} t$

$E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$

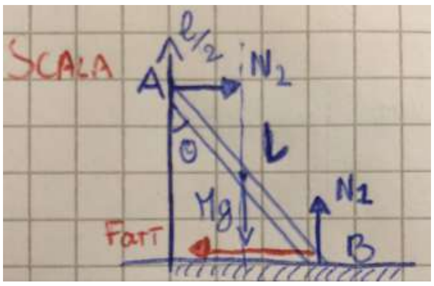
Per la ruota o un disco: $I_c = \frac{1}{2}mr^2$

$E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{4}mr^2\omega^2 = \frac{3}{4}m\omega^2 r^2$

🤯 $v_{CM}^2 = r^2\omega^2$

Se c'è strisciamento, $v_{CM} \neq \omega r$

Esempio Corpo rigido - Scala

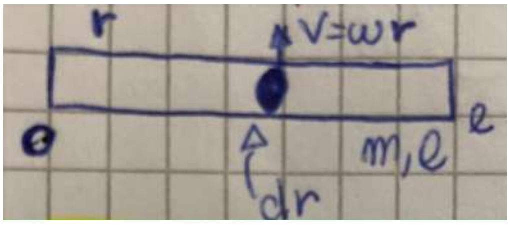


$$\overrightarrow{R_x^E} \Rightarrow N_2 - F_{att} = 0$$
$$\overrightarrow{R_y^E} \Rightarrow N_1 - Mg = 0$$

$$M_B = 0 \rightarrow M_B = Mg\frac{L}{2}\sin\theta - N_2 L\cos\theta$$
$$M_A = Mg\frac{L}{2}\cos\theta + N_1 L\sin\theta - F_{att} L\cos\theta$$

Asta rigida

$$dL = dmrv = \frac{m}{l}drr\omega r = \frac{mr^2\omega}{l}dr$$



$$L_0 = \frac{m\omega}{l}\int_0^l r^2 dr \rightarrow L_0 = \frac{m\omega l^3}{3l} \rightarrow L_0 = \frac{1}{3}ml^2\omega \rightarrow L_0 = I\omega$$

🤯 I → momento d'inerzia = $\frac{1}{3}ml^2$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^l x dm = \frac{l}{2}$$

Calcolo Momento di inerzia cilindro