Esercitazione 7 gennaio 2021 - Preparazione esame

$F(x)=\int_0^x \ln\left(1+\frac{\tau^2}{\tau^2+1}\right)dt$ $\qquad f(\tau)=\ln\left(1+\frac{\tau^2}{\tau^2+1}\right)$ $\qquad 1+\frac{\tau^2}{\tau^2+1}\geq 1 \quad \forall \tau\in\mathbb{R}$

$f(\tau)$ definita $\forall x\in\mathbb{R}$

$DF=\forall x\in\mathbb{R}$ (1)

(2) Proprietà: pari o dispari

$F(-x)=\int_0^{-x} f(\tau)\,d\tau \Rightarrow -\int_0^{x} f(\tau)\,d\tau$

$f(\tau)$ è pari $\Rightarrow f(-\tau)=\ln\frac{1+(-\tau)^2}{(-\tau)^2+1}=\ln 1+\frac{\tau^2}{\tau^2+1}=f(\tau)$

$F(x)$ è dispari $\forall x\in D \Rightarrow$ grafico simmetrico rispetto all'origine

(3) zeri - segno

$F(0)=\int_0^0 f(\tau)\,dt=0$

$f(\tau)\geq 0 \qquad \ln\frac{1+\tau^2}{\tau^2+1}\geq \ln(1)$

poiché $f(\tau)\geq 0$, per $x>0$ $F(x)>0$
per $x<0$ $F(x)<0$

(4) $\lim_{x\to+\infty\,(-\infty)} F(x)=\int_0^{+\infty} f(\tau)\,dt$ $\qquad$ confronto asintotico $f(\tau)=\ln\left(1+\frac{1}{\frac{1+1}{\tau^2}}\right)$ dvido per τ^2

per $t\to+\infty$ $f(\tau)\sim\ln(2)=g(\tau)$ ora $\int_0^{+\infty} f(\tau)\,dt$ ha lo stesso carattere di $\int_0^{+\infty}\ln(2)\,dt$.

ma $\int_0^{+\infty}\ln(2)\,dt=\ln(2)\int_0^{+\infty}1\,dt=$ ~~$+\infty$ diverge~~ $\lim_{M\to+\infty}\int_0^M 1\,dt=\ln(2)\lim_{M\to+\infty}\tau\Big|_0^M=+\infty$
diverge

$\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ e per simmetria $\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$

asintoti obliqui $y=mx+q$

$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{x^2+1}\right)=\ln(2)\to m$

$q=\lim_{x\to+\infty}F(x)-mx=F(x)-\ln(2)x=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(\tau)dt-\ln(2)x=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(\tau)dt-\int_0^x\ln(2)\,dt$

$=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\underbrace{\left[\ln\left(1+\frac{\tau^2}{\tau^2+1}\right)-\ln(2)\right]}_{\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau^2}{2(\tau^2+1)}\right)=\ln\left(\frac{2\tau^2+1}{2(\tau^2+1)}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{2(\tau^2+1)}\right)}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\ln\left(1-\frac{1}{2(\tau^2+1)}\right)dt=\int_0^{+\infty}\underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{2(\tau^2+1)}\right)}_{g(\tau)}dt$

$g(t)<0$ poiché $1-\frac{1}{2(\tau^2+1)}<1$. Considero $h(\tau)=-\ln\left(1-\frac{1}{2(\tau^2+1)}\right)>0$

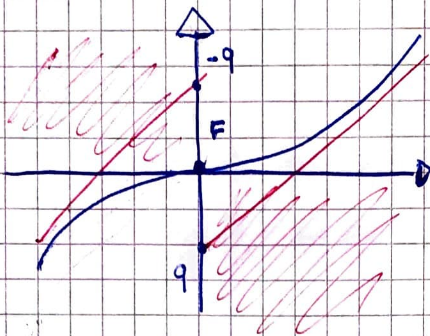
Criterio del confronto asintotico

per $t \to +\infty$, $h(t) \sim \frac{1}{2(t^2+1)} \sim \frac{1}{t^2}$ converge.

$\int_1^{+\infty} h(t)$ ha lo stesso carattere di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ e poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, allora

$\int_1^{+\infty} h(t)\,dt$ converge e quindi anche $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt \Rightarrow \lim F(x) - \ln(2)x = q < 0$

$\boxed{y = \ln(2)x + q}$ con $q < 0$



(6) $F'(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{x^2+1}\right) > 0$ poiché $1 + \frac{x^2}{x^2+1} > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ F è crescente monotona.

(7) ~~Flesso~~ Derivata seconda

$F'(x) = \ln\frac{2x^2+1}{x^2+1}$ $\qquad F''(x) = \frac{1}{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{4x(x^2+1) - (2x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{\cancel{x^2+1}}{(2x^2+1)} \cdot \frac{4x - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(2x^2+1)(x^2+1)}$$

$F''(x) = 0 \quad 2x = 0 \quad x = 0$ flesso

$F''(x) \geq 0 \quad 2x \geq 0 \quad x \geq 0$ Concavità verso l'alto.

Serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ $\qquad a_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ $\qquad 0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < 1$

$\sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) > 0$

Studio la convergenza assoluta

$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left|\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right|}_{b_n > 0}$ $\qquad$ Condiz. necessaria $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ (può convergere)

Criterio del confronto asintotico $\sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ $\qquad$ TAYLOR $\Sigma \sim \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] =$

$= \left|-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right|$

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum\left|-\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, quindi converge anche $\sum b_n$ e di conseguenza $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente e quindi, semplicemente.

Stima errore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$ serie a segni alterni

Studio la convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad b_n = \frac{1}{n!} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

Criterio del rapporto $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ serie convergente.

La serie $\sum a_n$ converge assolutamente e quindi semplicemente.

- Studio la convergenza con il criterio di Leibniz.

$b_n = \frac{1}{n!} > 0$ é monotona decrescente $b_{n+1} \leq b_n$ $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n!)} \leq \frac{1}{n!}$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 1$ vero se $n+1 \geq 1 \ \forall n \geq 0$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1} (-1)^n b_n$ é convergente.

Per il criterio di Leibniz S_K K-esima ridotta
S = Somma

$$|S - S_K| \leq b_{K+1} = \frac{1}{(K+1)!}$$

Scelgo un K tale che $\frac{1}{(K+1)!} < \frac{1}{100}$ se $K=3$ $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$ NO

se $K=4$ $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ Si

$$|S - S_4| \leq \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^n}{n!} = \left| -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right|$$

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}$ $a_n = \frac{1}{n\ln^2(n)} > 0$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Confronto $a_n \leq \frac{1}{n}$ non scopro nulla $\ln^2(n) \leq n^{2\alpha}$ con $\alpha > 0$

$\frac{1}{n n^{2\alpha}} \leq a_n \Rightarrow \frac{1}{n^{1+2\alpha}} \leq a_n$ con $\alpha > 0$ non scopro nulla

Studio la funzione $f: [2; +\infty)$ $f(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$ Criterio di Mac Laurin

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [2; +\infty)$ f é monotona

La serie ha lo stesso carattere dell'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{1}{x\ln^2(x)} dx$

$= \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^M = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{\ln(M)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}$ Converge.

Stimo l'errore $< \frac{1}{100}$

S_K = K-esima ridotta, S = somma $\quad 0 \le S - S_K \le \int_K^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx$

$$\lim_{M\to+\infty}\int_K^M \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx \le \lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\Big|_K^M = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{\ln(M)} + \frac{1}{\ln(K)} = \frac{1}{\ln(K)}$$

Scelgo K tale che

$$\frac{1}{\ln(K)} \le \frac{1}{100} \to \ln(K) \ge 100 \qquad K \ge e^{100}$$

Geometria analitica

Sia r la retta per $A=(1,0,2)$ e $B=(3,4,1)$ e sia s la retta intersezione di $x-2y-1=0$ e $y+z=0$

1) Stabilire la posizione reciproca di s e r e calcolare la distanza

2) Nel fascio di piani di sostegno s, determinare il piano parallelo a r e calcolare la distanza tra il piano e r

$$\overrightarrow{AB} = \underline{v_r} = \begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix} = 2i+4j-k \qquad r = \begin{cases}x=1+2t\\y=4t\\z=2-t\end{cases}$$

$$s = \begin{cases}x-2y-1=0\\y+z=0\end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases}x=2u+1\\y=u\\z=-u\end{cases} \to \underline{v_s} = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$\underline{v_r}$ e $\underline{v_s}$ $\Rightarrow$ s e r non sono parallele. Studio l'incidenza

$$\begin{cases}1+2t=2u+1\\4t=u\\2-t=-u\end{cases} \to \begin{matrix}u=t\\u=4t\end{matrix} \quad \begin{matrix}u=0\\t=0\\2\neq 0\end{matrix}$$

NON sono incidenti. r ed s sono sghembe

distanza r e s. $\quad P \in r = (1+2t; 4t; 2-t)$, $Q \in s: (2u+1; u; -u)$

$$PQ = \begin{bmatrix}1-2t-2u-1\\4t-u\\2-t+u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2t-2u\\4t-u\\2-t+u\end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{PQ}\cdot \underline{v_r} = 0$ e $\overrightarrow{PQ}\cdot\underline{v_s} = 0 \to 2(2t-2u)+(4t-u)-(2-t+u)=0 \to 9t-6u-2=0$

↳ $2(2t-2u)+4(4t-u)-(2-t+u)=0 \to 21t-9u-2=0$

$$\begin{cases}21t-9u-2=0\\9t-6u-2=0\end{cases} \to \begin{cases}9t-6u-2=0\\12t-3u=0\end{cases} \to \begin{cases}9t-24t=2\\u=4t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=-\frac{2}{15}\\u=-\frac{8}{15}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}-\frac{4}{15}+\frac{16}{15}\\-\frac{8}{15}+\frac{8}{15}\\2+\frac{2}{15}-\frac{8}{15}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{12}{15}\\0\\\frac{24}{15}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/5\\0\\8/5\end{bmatrix}$$

$$d(r,s) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

2→ $F: x-2y-1+\lambda(y+z)=0$

$x+y(\lambda-2)+z(\lambda)-1=0$ parallelo a r

$n=\begin{bmatrix}1\\ \lambda-2\\ \lambda\end{bmatrix}$ $v_r=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$

$n\cdot \underline{v}_r=0$

$2(1)+4(\lambda-2)-1(\lambda)=0 \to 2+4\lambda-8-\lambda=0 \to \lambda=2$

$\pi: x+2y-1=0$ $n=\begin{matrix}1\\0\\2\end{matrix}$

distanza (π, r): $P\in r = A(1,0,2)$ $d(r,\pi)=d_1(A,\pi)$

Determino la retta $\tau \perp \pi$ passante per A $\tau=\begin{cases}x=1+s\\ y=0\\ z=2+2s\end{cases}$ $v_\tau=n$

$\tau\cap\pi=H$ $\pi: x+2z-1=0$

$(1+s)+2(2+2s)-1=0 \to 1+s+4+4s-1=0 \to 5s=-4 \to s=-4/5$

$H=(1/5,\ 0,\ 2/5)$

$dist(A,\pi)=dist(A,H)=\sqrt{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2+\left(2-\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{64}{25}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$