💡

Dimostrazioni secondo parziale

Sviluppo di Taylor

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + resto$$

Resto secondo Peano → descrizione qualitativa

$T: f(a,b) \to \Re$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$ allora $f(x) = T_{n,x_0}(x) + o(x-x_0)^n$

> 🤯 $o(x-x_0)^n$ → resto.

Esempio: $x_0 = 0, n = 2$ → $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

▼ Dimostrazione

Dobbiamo far vedere che il

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2}}{x^2} =^H \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}{2x} = 0$$

f' è derivabile in 0, g è derivabile in $x_0 : g(x_0 + h) - g(x_0) = y'(x_0)h + o(h)$ ← **definizione**

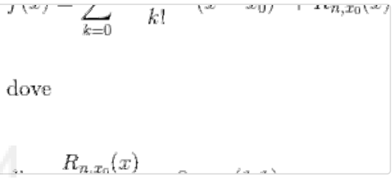
$x_0 = 0, h = x \qquad g(x) - g(0) = g'(0)x + o(x) \qquad g = f'(x) \qquad f'(x) - f'(0) = f''(0)x + o(x)$

▼ Dimostrazione you math

Teorema della formula di Taylor con il resto di Peano

Eccomi come promesso! Iniziamo con l'enunciato. Teorema di Taylor con resto di Peano Sia una funzione derivabile volte in un intorno di che chiamo e ed esiste . Allora risulta Partiamo dalla funzione e la scriviamo nel modo seguente: Cosa ho fatto? Ho sommato e sottratto i termini alla

https://www.youmath.it/forum/analisi-1/9121-teorema-della-formula-di-taylor-con-il-resto-di-peano.html



Resto secondo Lagrange → descrizione quantitativa

$f: [a;b] \to \Re$, derivabile $n+1$ volte in $[a;b]$

allora $\exists$ c tra x_0 e x : $f(x) = T_{n,x_0}(x) + f^{n+1}(c) * \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

> 🤯 f^{n+1} → derivata n+1 esima

▼ Dimostrazione

$x_0 = a, x = b, n = 1$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2!}$$

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = k(b-a)^2$$

> 🤯 $k(b-a)^2$ → deve essere $f''(c)\frac{(b-a)^2}{2!}$

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - k(b-x)^2$$

Sostituiamo la a con le x. $g(b) = 0$ se metto b al posto di x, $g(a) = 0$ poiché k deve verificare l'uguaglianza.

$$\exists c : g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow g'(x) = \cancel{-f'(x)+f'(x)} - f''(x)(b-x) + 2k(b-x)$$

$$g'(c) = -f''(c)(b-c) + 2k(b-c) = 0 \Rightarrow k = \frac{f''(c)}{2}$$

Non conosceremo mai C, quindi non sapremo mai quanto vale l'errore.

Integrali

Primitiva di una funzione (antiderivata)

Partiamo dalla **definizione di primitiva**. Prestate moltissima attenzione all'enunciato perché in questo frangente è estremamente facile fare confusione.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Una funzione $F(x)$ derivabile nell'intervallo $[a, b]$ è **una primitiva** (o antiderivata) di $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Una **primitiva** di una funzione f(x), detta anche antiderivata di f(x), è una qualsiasi funzione derivabile F(x) con derivata che coincide con la funzione assegnata: F'(x)=f(x). L'**integrale indefinito** è un operatore che assegna ad una funzione integrabile, detta *funzione integranda*, un insieme di primitive.

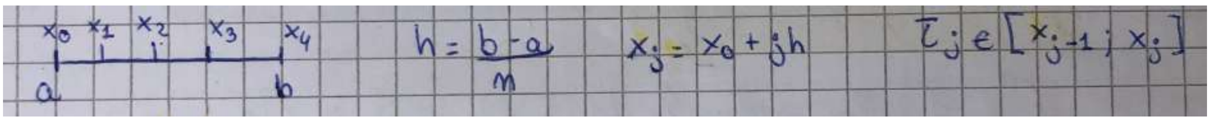
Se conosciamo una primitiva F di f su $[a; b]$, tutte le altre primitive sono della forma $F(x) + c$ (*costante*) → la derivata di una costante è 0.

- Se F è una primitiva, anche $F'(x) + c$ lo è
- Se F_1 e F_2 sono due primitive di f, allora $F_1' - F_2' \Rightarrow f - f = 0 \Rightarrow (F_1 - F_2)' = 0$ quindi $F_1 - F_2 = c$. Se la derivata è 0 in ogni punto, allora la f è una costante.
- Se f ha una discontinuità a salto $c \in [a; b] \Rightarrow f$ non ha la primitiva (anche se è integrabile).
- Teorema → se f è continua in $[a; b] \Rightarrow \exists$ primitiva di f

Di alcune funzioni **NON** sappiamo scrivere la primitiva (anche se esiste): Esempio: $\int_a^b e^{-x^2}$

Integrali indefiniti

Definizione: $f : [a; b] \to \Re \qquad f$ è limitata



🤯 $x_j - x_{j-1}$ → lunghezza dell'intervallo

Integrali indefiniti

A questo punto sappiamo che una funzione che ammette una primitiva, ne ammette infinite che differiscono di una costante additiva. Ha quindi senso definire l'**insieme di tutte le primitive** di una funzione e di attribuirli un nome: lo chiameremo **integrale indefinito della funzione**.

Ribadiamo ancora una volta che nel caso più generale possibile la definizione di primitiva di una funzione, e dunque la definizione di integrale indefinito, non richiede l'ipotesi di continuità. Tale ipotesi aggiuntiva viene proposta alle scuole superiori solamente per fissare le idee.

Definizione di integrale indefinito

Sia f una funzione definita su un intervallo $[a, b]$. Si definisce **integrale indefinito** di f su [a,b] l'insieme di tutte le primitive della funzione f in $[a, b]$ e si indica con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

In base a quanto detto sulle primitive possiamo asserire che:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{dove } F(x) \text{ è una primitiva di } f$$

Anche se la notazione non lo lascia intendere esplicitamente sottolineamo che l'integrale indefinito identifica un insieme di funzioni e non una funzione particolare. Questo fatto viene messo in evidenza dalla costante additiva c, che è arbitraria e non deve mai e poi mai essere omessa... Soprattutto negli

Somma di Cauchy - Riemann

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

Funzione Integrabile

Si dice che $f : [a;b] \to \Re$, f limitata ed integrabile su $[a;b]$ **se** presa una qualsiasi successione $\{S_n\}$ (*somma di Cauchy-Riemann)*, esiste finito il $lim_{x\to\infty} S_n$

Se f è integrabile su $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} S_n$

- Teorema: Se f continua in $[a;b]$ $\Rightarrow$ è **integrabile**.
- Teorema: Se f è **limitata** e **monotona** $\Rightarrow$ è **integrabile.**
- Teorema: Se $[a;c]$, $[c;b]$ (l'intervallo $[a;b]$ è diviso in due pezzi). Se f_1è integrabile su $[a;c]$, f_2 è integrabile su $[c;b] \Rightarrow g(x) = \begin{cases} f_1(x) & a \le x < c \\ qualsiasi \quad cosa & x = c \\ f_2(x) & c < x \le b \end{cases} \Rightarrow$ è integrabile su $[a;b]$
    - conseguenza: f integrabile su $[a;b]$

      La rendo discontinua in un punto $f^* = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ k & x = c \end{cases} \Rightarrow f^*$ è integrabile.

$$\int_a^b f^* dx = \int_a^b f(x)dx$$

L'integrale non è in grado di "*sentire*" cosa succede nei singoli punti.

- conseguenza: Se f è **continua** in $(a;b), \exists$ finiti $lim_{x\to a^+} f(x), lim_{x\to b^-} f(x) \Rightarrow f$ è integrabile su $[a;b]$

  Esempio: $f(x) = \frac{sinx}{x} \to \int_1^{27} \frac{sinx}{x}dx$ $\quad f$ è continua in $[1;27]$ l'integrale esiste.

  Esempio: $f(x) = \frac{sinx}{x} \to \int_0^1 \frac{sinx}{x}dx$ $\quad f$ è continua in $(0;1]$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{x} = 1$ quindi la f è integrabile in $(0;1]$, anche se l'intervallo è aperto in 0.

Proprietà integrali

1. Linearità: f, g sono integrabili su $[a;b] \Rightarrow (\alpha f(x) + \beta g(x))$ è integrabile su $[a;b]$

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$$

L'integrale della somma, è la somma degli integrali

▼ Dimostrazione:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha f(t_j) + \beta g(t_j)) = \alpha((\frac{b-a}{n})\sum_{j=1}^{n} f(t_j)) + \beta((\frac{b-a}{n})\sum_{j=1}^{n} g(t_j))$$

2. Additività: Se f è integrabile $[a;b]$ e $c \in (a;b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. Monotonia: Se f è integrabile su $[a;b]$ e $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$ allora $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

▼ Dimostrazione:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_j) \geq 0$$

Ogni S_n è ≥ 0 (*teorema di permanenza del segno*)

- conseguenza 1 → se f e g sono integrabili su $[a;b]$ e $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a;b]$

$$\int_a^b f(x)dx. \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$(f(x) - g(x)) \geq 0$$

- conseguenza 2 → f integrabile su $[a;b]$ e $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

> 🤯 Il modulo della somma è ≤ della somma dei moduli. $|a+b| < |a| + |b|$, $-3 \leq x \leq 3 \qquad |x| \leq 3$

Media integrale

f integrabile su $[a;b]$, si chiama media integrale (*definita per tutte le f integrabili*)

$$f_M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad f_M = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{b-a}}(\frac{\cancel{b-a}}{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_j))$$

> 🤯 *La medie integrale è la media aritmetica*

Teorema della media

Se f è continua in $[a;b] \Rightarrow$ integrabile.

$$\exists c \in [a;b] : f(c) = f_M \qquad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

▼ Dimostrazione

f continua in $[a;b] \Rightarrow$ Weierstrass (*esiste max assoluto e min assoluto*)

$$\forall x \in [a;b] \qquad m \leq f(x) \leq M \qquad \exists x_m, x_M : m = f(x_m), M = f(x_M)$$

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$

> 🤯 *L'integrale della costante è la costante per la lunghezza dell'intervallo.*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Divido tutto per $(b-a)$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M \to teorema \quad dei \quad valori \quad intermedi$$

$$\exists c : f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

---

f integrabile su $[-a;a]$ se f è pari $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)$, se f è dispari $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Interpretazioni fisiche e geometriche.

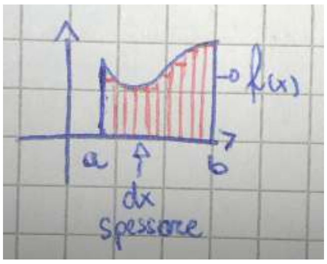
Area

$f(x) \geq 0$ su $[a;b]$

$f(x) = h \quad dx = b$

$Area = \int dA = \int_a^b f(x)dx$

$dA = f(x)dx$



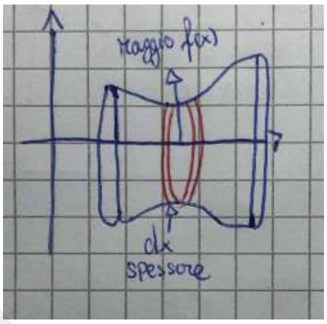
Solidi di Rotazione, Volume

ruota introno all'asse x, $f(x)$ = raggio, $dx = h, spessore$

$V = \pi r^2 h$

$dV = r(f(x))^2 dx$

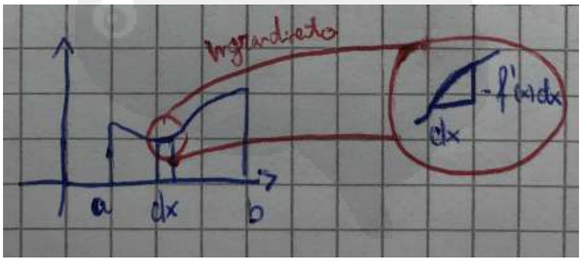
$V = \int dV = \int_a^b r(f(x))^2 dx$



Lunghezza linea grafico della funzione

Ipotenusa triangolo rettangolo.

Cateto 1 = dx, Cateto 2 = $-f'(x)dx$

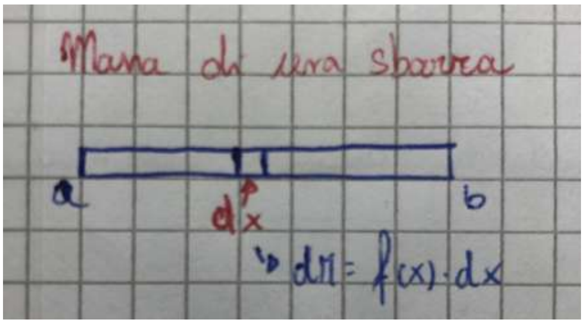


$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x))^2 dx^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

$$L = \int dL = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2}dx$$

Massa di una sbarra

$f(x) =$ densità della massa



$M = \int dM = \int_a^b f(x)dx$

$x_B = \frac{1}{M}\int_a^b xf(x)dx \to$ ascissa del baricentro (**centro di massa**).

---

1. Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f continua in $[a;b]$, F è una primitiva

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a) = [F(x)]_a^b$$

▼ Dimostrazione

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) \Rightarrow F(x_n) - F(x_n - 1) + F(x_n - 1) - ... - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{j=1}^{n} F(x$$

Se g continua in $[c;d]$ e derivabile in $(c;d)$, vale il teorema di Lagrange

$$\exists t \in (c;d) : g'(t) = \frac{g(d) - g(c)}{d - c} \Rightarrow g(d) - g(c) = g'(t)(d - c)$$

> 🤯 $\sum_{j=1}^{n} F(x_j) - F(x_j - 1)$, per un'opportuna scelta dei valori t_j, $F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_j - 1) \to_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

2. Teorema fondamentale del calcolo integrale

f e F integrabili (in senso proprio o improprio) su $I \subseteq \Re \Rightarrow$ abbiamo due tesi

1. F è continua in I
2. Se f è continua in I, allora F è derivabile in I e $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$. (*Ogni funzione continua ha una primitiva*).

▼ 1. Dimostrazione

Se f è integrabile $\Rightarrow F$ è continua. (Se è discontinua non ha la primitiva, ma basta spezzare l'intervallo e troviamo così l'integrale).

1.A) Se f è integrabile in senso proprio $\Rightarrow f(x)$ è limitata, $|f(x)| \leq M$

$$\forall \overrightarrow{x} \in I \quad |F(\overrightarrow{x} + h) - F(\overrightarrow{x})| = |\int_{x_0}^{\overrightarrow{x}+h} f - \int_{x_0}^{\overrightarrow{x}} f|$$

$$|\int_{\overrightarrow{x}}^{\overrightarrow{x}+h} f(t)dt| \leq |\int_{\overrightarrow{x}}^{\overrightarrow{x}+h} |f(t)|dt| \leq |\int_{\overrightarrow{x}}^{\overrightarrow{x}+h} Mdt|$$

$$M|h| \to^{h\to 0} 0$$

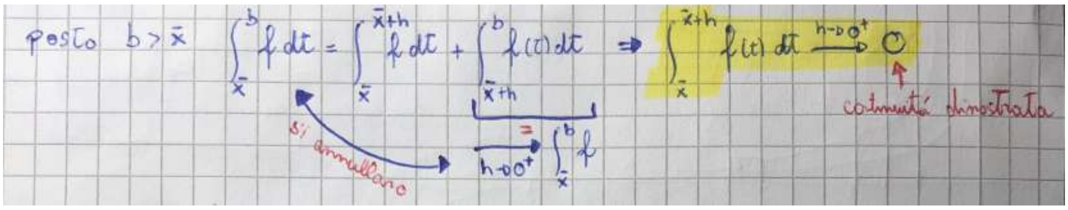
Continuità dimostrata

1.B) Se f è integrabile in senso improprio $\Rightarrow f \to +\infty \quad x \to \overrightarrow{x}$ (asintoto verticale)

posto $b > \overrightarrow{x}$

$$\int_{\overrightarrow{x}}^{b} fdt = \int_{\overrightarrow{x}}^{\overrightarrow{x}+h} fdt + \int_{\overrightarrow{x}+h}^{b} f(t)dt \Rightarrow \int_{\overrightarrow{x}}^{\overrightarrow{x}+h} f(t)dt \to^{h\to 0^+} 0$$

▼ Spiegazione



Continuità dimostrata.

▼ 2. Dimostrazione

f continua $\Rightarrow F$ derivabile, $\forall \overrightarrow{x} \in I \quad F'(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})$.

> 🤯 La derivata di F è f

f è continua, $h > 0$. Rapporto incrementale:

$$\frac{F(\overrightarrow{x}+h) - F(\overrightarrow{x})}{h} = \frac{1}{h}(\int_{x_0}^{\overrightarrow{x}+h} f - \int_{x_0}^{\overrightarrow{x}} f = \frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{x}}^{\overrightarrow{x}+h} f(t)dt = f(ch)$$

$\int_{\overrightarrow{x}}^{\overrightarrow{x}+h} f(t)dt$ → continua per ipotesi.

$f(ch)$ → Teorema della media → $\exists_{ch} \in [\overrightarrow{x}; \overrightarrow{x}+h] : \frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{x}}^{\overrightarrow{x}+h} f(t)dt = f(ch)$

$\overrightarrow{x} < ch < \overrightarrow{x} + h$

$$lim_{x\to 0^+} \frac{F(\overrightarrow{x}+h) - F(\overrightarrow{x})}{h} = lim_{x\to 0^+} f(ch) \to^{h\to 0} f(\overrightarrow{x})$$

$$lim_{x\to 0^-} \frac{F(\overrightarrow{x}+h) - F(\overrightarrow{x})}{h} = lim_{x\to 0^-} f(ch) \to^{h\to 0} f(\overrightarrow{x})$$

La derivata destra e la derivata sinistra coincidono, quindi la derivata di $F(\overrightarrow{x})$ è $f(\overrightarrow{x})$

Integrazione per parti

Trasformo l'integrale di un prodotto, in modo da riuscire a calcolarlo. Lo applico finché non sparisce la x.

Teorema: se F e G sono primitive di f e g su $[a; b]$

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

▼ Esempio:

Esempio: (1)

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \frac{1}{\cancel{x}} \, dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

$f'(x) = x \quad f(x) = x^2/2$

$g(x) = \ln \quad g'(x) = \frac{1}{x}$

(2) $$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \sin x \, dx \to -\cos x \sin x - \int -\cos x \cos x \, dx$$

$f'(x) = \sin x \quad f(x) = -\cos x$

$g(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x$

$$\to -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \, dx = -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\cos x \sin x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx \to 2 \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cos x \sin x + c$$

🤯 $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

$f'(x) \to integro \to f(x)$

$g(x) \to derivo \to g'(x)$

▼ Dimostrazione:

Derivata del prodotto, dal punto di vista delle primitive

$$[F(x)G(x)]' = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

La prima $[F(x)G(x)]'$ è la primitiva della somma $f(x)G(x) + F(x)g(x)$

$$\int_a^b (f(x)G(x) + F(x)g(x))dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

Abbiamo la tesi.

Integrazione per sostituzione

Teorema: f continua in (α, β), ϕ invertibile e derivabile in $[a;b]$, ϕ' è integrabile in $[a;b]$

$\tau = \phi(t) \quad \alpha = \phi(a) \quad \beta = \phi(b)$

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau$$

OPPURE:

$$\int f'(g(u))g'(u)du = \begin{bmatrix} posto \\ g(u) = v \\ g'(u)du = dv \end{bmatrix} = \int f(v)dv$$

▼ Dimostrazione

f continua, F primitiva

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau = F(\beta) - F(\alpha) = F(\phi(b)) - f(\phi(\alpha))$$

$$\frac{d}{dt}[F(\phi(t))] = f(\phi(t))\phi'(t)$$

$$\int_{a}^{b} f(\phi(t))\phi'(t)dt = [F(\phi(t))]_a^b = F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

Tesi.

▼ Esempio

$$\int (sinx)^3 cosxdx$$

Poniamo $sinx = t$ e sviluppiamo la sua derivata per trovare dt

$$\begin{bmatrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{bmatrix}$$

Sostituiamo la t e dx nell'integrale e risolviamo, ricordandoci di sostituire nuovamente $sinx$ al posto della t una volta risolto l'integrale:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{sinx^4}{4} + c$$

Integrazione di funzioni razionali

Vedere il "*formulario completo sugli integrali*"

Integrali impropri o generalizzati

Vedere il "*formulario completo sugli integrali*"

Funzioni integrali

f integrabile (proprio o improprio) su $I \subseteq \Re$, preso $x_0 \in I \rightarrow$ si dice funzione integrale di f in I

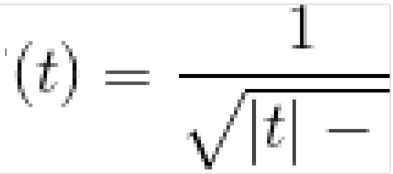
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Per tutti i passaggi:

Studio di funzione integrale

Lo studio di funzione integrale è l'insieme di procedure che consentono di disegnare il grafico qualitativo di una funzione integrale, ossia una funzione la cui espressione analitica è definita tramite l'operatore integrale. In questa mastodontica lezione, vedremo come studiare una funzione integrale.

https://www.youmath.it/lezioni/analisi-matematica/integrali/3273-studio-della-funzione-integrale.html



Serie

Vedere il "*formulario serie*"