

2^a PARTE

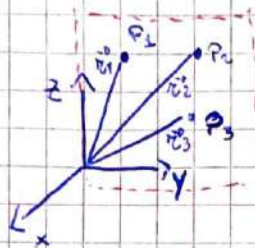
DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI → più corpi in uno spazio

$\vec{r} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{a} \rightarrow \vec{F}$

FORZE INTERNE → si sviluppano tra punti che appartengono all'insieme

FORZE ESTERNE → si sviluppano tra punti che non appartengono all'insieme

• l'interazione con l'esterno è mediata da alcune forze che agiscono tra i due sistemi



SISTEMA DI PUNTI

FORZE INTERNE

$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$ (agiscono sulla congiungente dei due corpi, sono a coppie uguali e opposte (principio di azione e reazione), possono essere attrattive o repulsive) → Es. **ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE**



RISULTANTE FORZE INTERNE

$m\vec{a} = \vec{R}^{(I)} = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i^{(I)} = 0$

Ogni punto ha m ed a diverse

FORZE ESTERNE



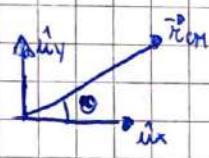
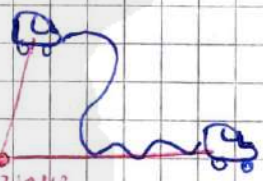
$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^m \vec{F}_{i,j}^{(I)} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{i,k}^{(E)}$
 $\vec{R}_i = \sum_{j=1}^m \vec{F}_{i,j}^{(I)} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{i,k}^{(E)}$ } Sul punto i-esimo (un singolo punto)

≠ 0 da forze interne del singolo corpo è diversa da 0
 La somma delle forze interne su tutti i punti del sistema, è 0 → $\sum_{i=1}^m \vec{F}_i^{(I)} = 0$

CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA DI PUNTI

$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^m m_i} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot \vec{r}_i}{M_{TOT}}$

media pesata delle masse presenti nel sistema



$x_{CM} = \vec{r}_{CM} \cdot \hat{u}_x = r_{CM} \cos \theta = \frac{\sum_{i=1}^m m_i x_i}{M}$ | $y_{CM} = \vec{r}_{CM} \cdot \hat{u}_y = r_{CM} \sin \theta = \frac{\sum_{i=1}^m m_i y_i}{M}$

$z_{CM} = \vec{r}_{CM} \cdot \hat{u}_z = \frac{\sum_{i=1}^m m_i z_i}{M}$

VELOCITA' CM → $\vec{v}_{CM} \triangleq \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \right) = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot \vec{v}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^m \vec{p}_i}{M}$

← quantità di moto

$\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$ → la velocità si comporta come un singolo punto di massa M che si muove con velocità \vec{v}_{CM}

ACCELERAZIONE CM → $\vec{a}_{CM} \triangleq \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot \vec{v}_i}{M} \right) = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot \vec{a}_i}{M}$

SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE (non ci sono termini di accelerazioni apparenti)

$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{R}_i^{(I)} + \vec{R}_i^{(E)} = \vec{R}_i$

$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \vec{a}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^m (\vec{R}_i^{(E)} + \vec{R}_i^{(I)})}{M} = \frac{\sum_{i=1}^m \vec{R}_i^{(E)}}{M} + \frac{\sum_{i=1}^m \vec{R}_i^{(I)}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^m \vec{R}_i^{(E)}}{M} \Rightarrow \frac{\vec{R}_i^{(E)}}{M} = \vec{a}_{CM} \Rightarrow \vec{R}_i^{(E)} = \vec{a}_{CM} \cdot M$

↑
TEOREMA NOTO CENTRO DI MASSA

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{p}}{M} \text{ (quantità di moto)}$$

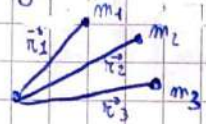
$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{R}^E}{M} \Rightarrow M \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{R}^E \quad \text{TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA}$$

Se $\vec{a}_{cm} = 0 \Rightarrow \vec{R}^E = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = \text{costante}$

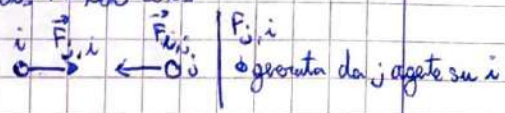
Se $\vec{R}^E = 0$, si conserva la velocità del CM (CONSERVAZIONE VELOCITÀ CENTRO DI MASSA)
 Se $\vec{a}_{cm} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{cm} = \text{costante}$ (CONSERVAZIONE POSIZIONE CENTRO DI MASSA)

TEOREMA ENERGIA CINETICA (SISTEMA DI PUNTI)

Singolo punto materiale $m \rightarrow \vec{v}$ $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ $\Delta E_k = \Delta T_{OT} = L_{cons} + L_{non\ cons}$



$$dL_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^I \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i$$



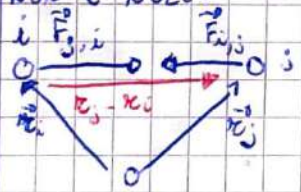
$$dL = \underbrace{\vec{F}_i^I \cdot d\vec{r}_i}_{dL^I} + \underbrace{\vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i}_{dL^E}$$

$dL^E \rightarrow$ somma lavori forze esterne (come fatto fino ad ora)

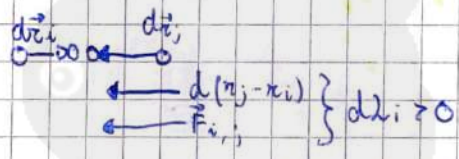
Calcoliamo il lavoro complessivo della forza $\vec{F}_{i,j} = \vec{F}_{j,i}$

$$dL_{i,j}^I = \vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{j,i} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_j - \vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{i,j} \cdot (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \vec{F}_{i,j} \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

Non è nullo



Ci sarà una variazione dovuta all'azione delle forze, se sposteremo i corpi.



$\vec{F}^I \rightarrow \vec{a}_{cm} = 0 = \frac{\sum \vec{F}_i}{M}$ come le forze si annullano $\rightarrow dL^I \neq 0$ in generale \vec{F}_i^I fanno lavoro

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA PER I SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Lavoro $\rightarrow dL = dL^E + dL^I = \Delta E_k = \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} m_i v_{ifm}^2}_{E_k \text{ finale}} - \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} m_i v_{iiniziale}^2}_{E_k \text{ iniziale}}$

dL^E conservative / non conservative
 dL^I conservative / non conservative

$\Delta E_k = \Delta T_{OT} = L_c + L_{non\ c} \Rightarrow \Delta E_k + \Delta U = \Delta E_{int} \Rightarrow L_{nc} = L_{nc}^I + L_{nc}^E$ (Lavoro non conservativi)

$L_c^I = -\Delta U^I$
 $L_c^E = -\Delta U^E$

TEOREMA ENERGIA MECCANICA $\Delta E_k + \Delta U^I + \Delta U^E \Rightarrow \Delta E_{int} = L_{nc}^I + L_{nc}^E$

TEOREMA DI KÖNIG (II TEOREMA) PER E_k (moto del centro di massa, moto dei singoli corpi rispetto al CM)

$$E_k = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i + \vec{v}_{cm})^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \vec{v}_i' \cdot m_i \vec{v}_{cm} \right]$$

\vec{v}_i' velocità del punto i nel sistema del centro di massa $\rightarrow v_i'$
 \vec{v}_{cm} velocità del centro di massa

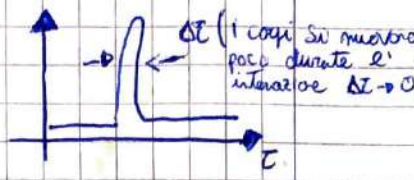
$E_k = E_k' + \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^m m_i) v_{cm}^2 = E_k' + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$

$\sum_{i=1}^m m_i \vec{v}_i' = 0$ (La definizione)

$E_{kTOT} = E_k' + E_{k,CM}$ energia del CM mediante il sistema si muove come M, $v_{cm} \rightarrow \frac{1}{2} M v_{cm}^2$

Ognuno dei punti ha un'energia aggiuntiva rispetto al centro di massa $\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ punt attorno al CM

FORZE IMPULSIVE → interazione impulsiva (Tempo molto breve)



ASSENZA DI FORZE ESTERNE IMPULSIVE → $R^E = 0 \Rightarrow \left(\frac{dP}{dt} = R^E\right) = 0$

Si conserva la quantità di moto del sistema

$\vec{P}_{IN} = \vec{P}_{FIN} \Rightarrow m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$ | VALE PER QUASISIASI URTI IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE

QUANTITÀ DI MOTO DEL CENTRO DI MASSA → $\vec{P}_{CM} = M \vec{V}_{CM} = (m_1 + m_2) \vec{V}_{CM} = \text{costante}$

N.B. $\frac{P_{IN}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = V_{CM} \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = V_{CM} (m_1 + m_2)$

QUANTITÀ DI MOTO DEI SINGOLI PUNTI, CAMBIA PER VIA DELL'AZIONE DI FORZE INTERNE IMPULSIVE

$\Delta p_1 = m v_{1f} - m v_{1i} = \vec{J}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1} dt$

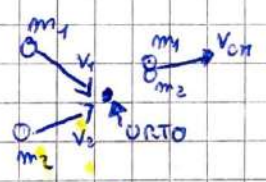
$\Delta p_2 = m_2 v_{2f} - m_2 v_{2i} = \vec{J}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2} dt$

$\Delta \vec{P}_{CM} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}^E dt = \vec{J}_{CM} \approx \vec{R}^E \Delta t$
 ↑
 impulso

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO → dopo l'urto i corpi rimangono attaccati.

Si conserva la quantità di moto → ($\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$) del centro di massa

NON si conserva l'energia cinetica → $E_k \neq E_k'$ (c'è una deformazione)



2 corpi prima dell'urto (m_1, v_1) (m_2, v_2) La V_{cm} è $\frac{(m_1 v_1) + (m_2 v_2)}{m_1 + m_2} = V_{cm}$
 - 1 corpo dopo l'urto ($m_1 + m_2$)
 V_{cm} = velocità del corpo.

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{cm} \Rightarrow v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ | TROVARE v_f DOPO L'URTO
 conservazione quantità di moto

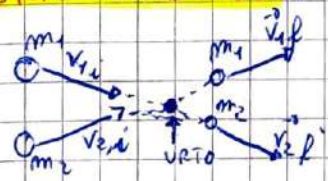
$E_{k, in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E_k' + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{cm}^2$

$E_{k, fin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{cm}^2$
 KÖNIG

$E_{kin} > E_{kfin}$ $\Delta E_k = E_k < 0$ perde energia

ENERGIA CINETICA

URTO ELASTICO → Si conserva sia la quantità di moto \vec{P} , sia l'energia cinetica E_k



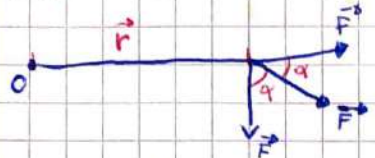
$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \Rightarrow \vec{P}_{cm}$ | Si conservano \vec{P} ed E_k
 $E_{kin} = E_{kfin}$

CENTRO DI MASSA → $\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{(m_1 + m_2)}$; $\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$; $\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{(m_1 + m_2)}$

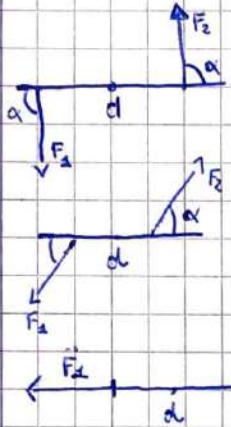
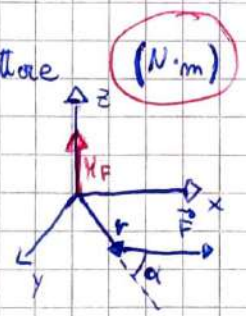
$R^E = \chi_{TOT} \cdot \vec{a}_{CM} \Rightarrow R^E = M \frac{dv_{CM}}{dt} \Rightarrow R^E = \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \Rightarrow R^E = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow I^e \text{ eq cardinale sistema di punti}$
 (Teorema moto centro di massa)

$P_{CM} = M \cdot \vec{v}_{CM} \rightarrow$ *quantità di moto del centro di massa*

MOMENTO DI UNA FORZA → equivalente alla forza rotazionale → è un vettore (N·m)



$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow M_F = r F \sin \alpha$
 Forza tangenziale → $M_F = r F_c$
 $\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}$ (anti commutativa)

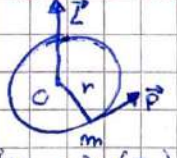


COPIE DI FORZE
 $F_1 = F_2 = F$ (devono essere parallelamente opposte)
 $M = Fd \sin \alpha$. Se sono perpendicolari, la F è max

$M_F = \frac{dL}{dt}$
 $M_F = I \alpha$

è nullo se le forze sono parallele al raggio (d) in questo caso. Le forze centrali fanno tutto momento nullo $\vec{M} = 0$ rispetto al centro del campo. (Elastica, F gravitazionale, F centripeta)

MOMENTO ANGOLARE O MOMENTO QUANTITÀ DI MOTO → equivalente della quantità di moto, per le rotazioni

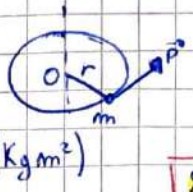


$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow m \cdot \vec{v}$ nel caso di punto materiale, \vec{r} e \vec{p} sono $\perp \Rightarrow \vec{L} = m \vec{v} r \Rightarrow L = r p$
 $L = I \omega$

Se su m agisce una forza tangenziale F_t , il momento di F_t rispetto a O è $M_F = r F_c$. Per la seconda legge della dinamica $F_t = m a_t \rightarrow r F_c = r m a_t$
 $\Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} \rightarrow r m \frac{dv}{dt} \rightarrow r m dp \rightarrow r F_c = r m \frac{dp}{dt} \Rightarrow M_F = \frac{dL}{dt}$

$R^E = \frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt}$ (risultante forze esterne)
 $\vec{M}^E = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt}$ (momento risultante forze esterne)
 $\vec{P}_{TOT} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ | SISTEMA DI PUNTI
 $\vec{L}_{TOT} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$ | SISTEMA DI PUNTI
 $\vec{P}_{TOT} = \int_{CORPO} d\vec{p}$ | CORPO RIGIDO
 $\vec{L}_{TOT} = \int_{CORPO} d\vec{L}$ | CORPO RIGIDO

MOMENTO D'INERZIA → è legato alla massa (tendenza a non farsi rotare in rotazione) della massa



$L = m v r \Rightarrow m \omega r^2$
 $v = \omega r$

$I = m r^2$ momento d'inerzia di m rispetto a O
 $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ | SISTEMA DI PUNTI
 $I = \int dm r^2$ | CORPO RIGIDO

$M_F = I \alpha$

CORPO NON RIGIDO → (molla attaccata a due mani) → (le forze interne compiono lavoro)
CORPO RIGIDO → sistema in cui le forze interne non compiono lavoro. 3 grad. di libertà → TRASLAZIONE (moto ca)
 3 gradi di libertà → ROTAZIONE.

GRADO DI LIBERTÀ → numero minimo di coordinate per descrivere completamente il moto
PUNTO MATERIALE → siccome può solo tradursi, ha solo 3 gradi di libertà.

TRASLAZIONI

ROTAZIONI

m
 \downarrow
 $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
 $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$
 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

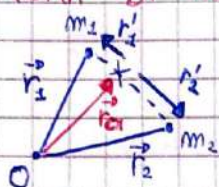
$I = m r^2$
 $\vec{\omega}$
 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
 $M_F = \vec{r} \times \vec{F} \quad / \quad M_F = I \alpha$
 $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
 α
 $M_F = \frac{dL}{dt}$

$R^E = \frac{dL_{TOT}}{dt}$

$M^E = \frac{dL_{TOT}}{dt}$

equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

TEOREMA DI KÖNIG



$\vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_1$
 $\vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_2$

$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$
 $\vec{r}'_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i$

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$
 $\vec{L}'_i = \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$

$L_{TOT} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i)$

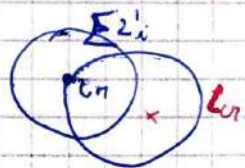
$= \sum (\vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}) + \sum \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}_{CM}) + \sum (\vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i) + \sum \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}'_i)$

$= \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} + (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum m_i \vec{v}'_i + \sum \vec{L}'_i$ (rispetto a CM)

Sapendo che $m \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$ ~~non~~ $= 0$ (mi posizione sul centro di massa, quindi la distanza è 0 e si annulla)

$m \vec{v}'_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i$ ~~non~~ $= 0$

$L_{TOT} = \underbrace{\vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}}_{L_{CM}} + \sum \vec{L}'_i \Rightarrow L_{TOT} = L_{CM} + \sum \vec{L}'_i$ I Teorema di König



Traslazione, la quantità di moto è uguale a quella del CM

Rotazione, momento angolare Totale ~~non~~ è uguale al momento angolare del CM

II Teorema di König sull'energia cinetica

$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$

$(\vec{v}_i + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}_i + \vec{v}_{CM}) = v_i'^2 + 2 \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}'_i + v_{CM}^2$

$\Rightarrow E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum \frac{1}{2} m_i 2 \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}'_i + \sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 \Rightarrow E_k = \sum E'_k + E_{k,CM}$ II Teorema di König

$L_0 \text{ è } 0 = \sum m_i v_i' = 0$

$\sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$

Somma E_k dei singoli punti attorno al CM (rotazione)

E_k del centro di massa (traslazione)

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

1. $\vec{P}^E = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ($m \cdot \vec{a}_{cm}$) 2. $\vec{M}^E = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt}$

Se $\vec{P}^E = 0 \Rightarrow \vec{P}$ costante, si conserva
 Se $\vec{M}^E = 0 \Rightarrow \vec{L}_{TOT}$ e' costante, si conserva

La conservazione dell'energia totale e' garantita solo se forze esterne e interne sono conservative

Densita' $\rho = \frac{m}{Volume}$

ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE $E_k = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega R_i)^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i R_i^2) \omega^2$

$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

-LAVORO IRREVERSIBILE $\rightarrow dW = dE_k = d(\frac{1}{2} I \omega^2) = I \omega d\omega = I \frac{d\theta}{dt} \omega dt = \tau d\theta$
base di rotazione

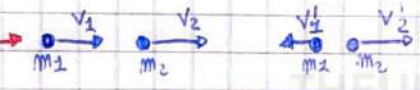
$W = \int \tau d\theta$ $W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$

Se le forze esterne sono conservative: $W = -\Delta E_p \rightarrow E = \frac{1}{2} I \omega^2 + E_p$

Se l'asse di rotazione e' a distanza d : $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{cm} + m d^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega d)^2$

Se le forze sono conservative: $E_k = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + E_p$

Legge di gravitazione universale $\rightarrow F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
↑ distanza tra i centri delle masse

URTO ELASTICO \rightarrow  $\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' & \text{cons. q.t.a di moto} \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 & \text{cons. energia cinetica} \end{cases}$

Semplificare \rightarrow $\frac{m_1(v_1 - v_1')}{m_1} = \frac{m_2(v_2 - v_2')}{m_2}$ (I) \rightarrow divido la (II) per (I) $\rightarrow \frac{m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')}{m_1(v_1 - v_1')} = \frac{m_2(v_2 - v_2')(v_2 + v_2')}{m_2(v_2 - v_2')}$ (II)

$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \rightarrow v_2' = v_1' + v_1 - v_2$ \rightarrow la inserisco nell'eq. di conservazione della quantita' di moto.

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_1' + m_2 v_1 - m_2 v_2 \rightarrow v_1' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_1' = \frac{m_1 v_1 (m_1 - m_2) + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Se $v_2 = 0$ $v_1' = \frac{v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$

Se i corpi sono uguali, dopo l'urto essi si scambiano la velocita'. Quello fermo prende la velocita' del corpo in movimento e di conseguenza, il corpo che era in movimento, si ferma.

MOTO DI ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO

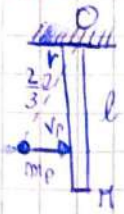


$v_{P1} = \omega R$ (tutti i punti hanno la stessa velocita') $S = v_{P1} \cdot t$ $v_{cm} = v_{P1} = \omega R$
 $E_k = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$ ruota o disco: $I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$

$E_k = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m \omega^2 R^2$
sono uguali

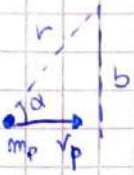
Se c'e' strisciamento $v_{cm} \neq \omega R$

PENDOLO COMPOSITO → URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO



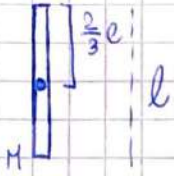
in O, le reazioni vincolari ~~sono~~ forze impulsive → forze intense che si manifestano al momento dell'urto.
 ↳ hanno momento = 0, nel punto O

$\vec{H}_O^E = 0 \rightarrow$ conservazione L_0 (momento angolare totale)
 ↳ il braccio è O, $r \cdot F \cdot \sin 180^\circ$
 $|L| = (L \perp \text{al piano})$



L prima dell'urto $\rightarrow m_p v_p \cdot r \sin \alpha \Rightarrow m_p v_p \frac{2}{3} l$
 $\frac{2}{3} l$ (nel nostro caso)
 b

Braccio = distanza punto-retta tra la direzione del vettore forza e il punto scelto



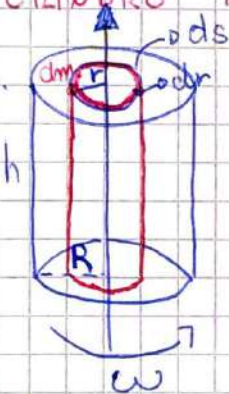
L dopo l'urto $\rightarrow I \omega' = (I_{barra} + I_{proiettile}) \omega' = \left(\frac{1}{3} M l^2 + m_p \cdot \left(\frac{2}{3} l \right)^2 \right) \omega'$

L prima = L dopo $\rightarrow m_p v_p \cdot \frac{2}{3} l = \left(\frac{1}{3} M + \frac{4}{9} m_p \right) l^2 \omega'$

$v_p' = \omega' \cdot \frac{2}{3} l$

$\omega' = \frac{m_p v_p \frac{2}{3}}{\frac{3M + 4m_p}{9} l} \Rightarrow \omega' = \frac{6 m_p v_p}{(3M + 4m_p) l}$

CILINDRO MOMENTO D'INERZIA



$dL = dm \vec{r} \times \vec{v} \rightarrow dL = (dm) r v$ ($v = \omega r$)

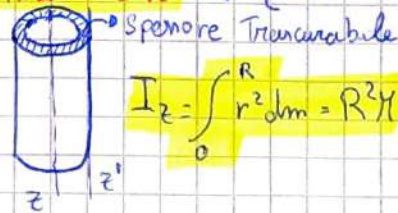
$dm = dv \cdot \rho \Rightarrow dm = \frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi r dr h$
 volume densità

$L = \int \frac{2\pi m r dr}{R^2} \cdot r \omega r \rightarrow L = \frac{2m\omega}{R^2} \int_0^R r^3 dr \Rightarrow L = \frac{2m\omega}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2 \omega$

$dv = ds \cdot h$
 $ds = 2\pi r \cdot dr$
 corona circolare spessore guscio

$L = \frac{1}{2} M R^2 \omega \rightarrow L = I \omega$

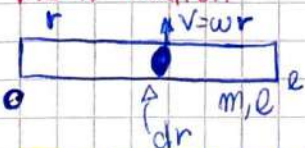
CILINDRO CAVO $V = [\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2] \cdot h$



$I_z = \int_0^R r^2 dm = R^2 M$

TEOREMA ASSI PARALLELE
 $I_{z'} = \frac{R^2}{4} M + M R^2 = \frac{5}{4} M R^2$
 I_z
 vedi pag 20

ASTA RIGIDA



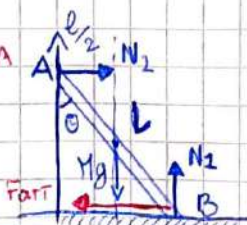
$dL = dm r v = m dr r \omega r = \frac{m r^2 \omega}{l} dr$

$L_0 = \frac{m \omega}{l} \int_0^l r^2 dr \rightarrow L_0 = \frac{m \omega l^3}{3l} \rightarrow L_0 = \frac{1}{3} m l^2 \omega \rightarrow L_0 = I \omega$

$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^l x dm \rightarrow \frac{l}{2}$ (centro di massa)

CORPO RIGIDO → non si considera la risultante delle forze interne, esse non compiono lavoro. Sono sempre uguali a coppie.

SCALA



$\vec{R}_x^E \Rightarrow N_2 - F_{att} = 0$
 $\vec{R}_y^E \Rightarrow N_1 - Mg = 0$

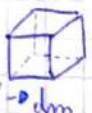
$M_B = 0 \Rightarrow M_B = Mg \frac{L}{2} \sin \theta - N_2 L \cos \theta$

$M_A \Rightarrow Mg \frac{L}{2} \cos \theta + N_1 L \sin \theta - F_{att} L \cos \theta$

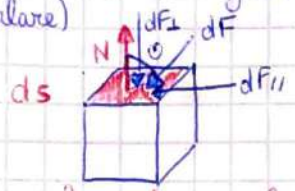
regola mano destra: pollice = distanza, indice = forza, medio = direzione vettore

FLUIDI → è un sistema continuo, può essere un liquido o un gas
 liquid → fluidi incompressibili
 gas → fluidi comprimibili.

densità → è legata alla massa $\rho = \frac{dm}{dV}$ (densità puntuale)

 Se la densità è uniforme, allora $\rho = \frac{m}{V}$

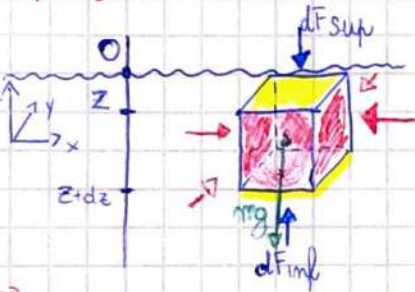
PRESSIONE → è legata alla forza (scalare) $p = \frac{dF_{\perp}}{dS}$



$p = \frac{d\vec{F} \cdot \vec{N}}{dS} = \frac{F_{\parallel} N_{\perp} \cos \theta}{dS} = \frac{F_{\perp}}{dS}$ spazio normale

F_{\parallel} → sforzo tangenziale → $\gamma = \frac{dF_{\parallel}}{dS}$ se il liquido è all'equilibrio, sono presenti solo sforzi normali (fa traslare il corpo)

EQUILIBRIO: RISULTANTE DELLE FORZE



$mg = dm \cdot g$
 $dm = \rho dV$

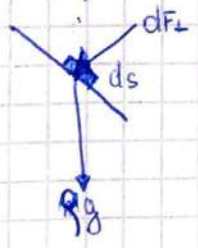
$F_{sup} \rightarrow p(z) \cdot dx dy$
 $F_{inf} \rightarrow p(z+dz) \cdot dx dy$

$d \text{ Forza peso} = \rho \cdot dV \cdot g = \rho g \cdot dx dy dz$

$\vec{R} = dF_{peso} + dF_{sup} - dF_{inf} \rightarrow \rho g \cdot dx dy dz + p(z) \cdot dx dy - p(z+dz) \cdot dx dy$
 (divido tutto per $dV = dx dy dz$)
 $\rho g = \frac{p(z+dz) - p(z)}{dz}$ lim $z \rightarrow 0$ ottengo la derivata di p (lim rapporto incrementale)

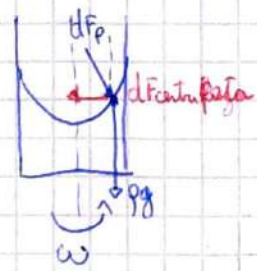
$\rho g = \frac{dp}{dz}$ → Equilibrio dei fluidi pesanti (gradiente di pressione → se dipende da più di una variabile)

Le superfici a contatto con l'esterno del fluido sono tutte orizzontali, altrimenti non c'è equilibrio



N_0 EQUILIBRIO.

SE IL FLUIDO RUOTA →

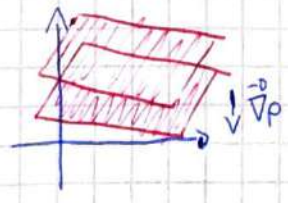
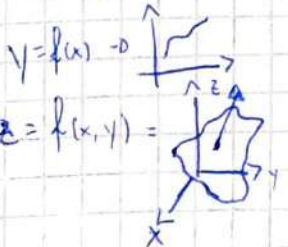


$\rho g = \frac{dp}{dz}$

$\rho \vec{g} = -\vec{\nabla} p$
 ↑ gradiente di pressione

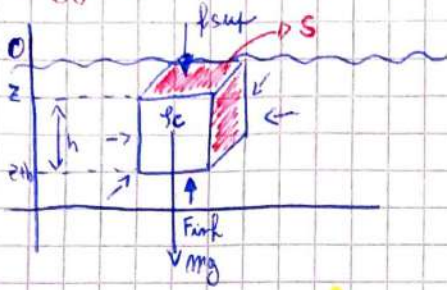
∇ → nabla
 ∇p → gradiente di pressione.

$f(x, y, z) \quad \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$ gradiente



atmosferica = $p_0 e^{-kz}$
 $\vec{\nabla} p = \frac{dp}{dz} \hat{k} = -k p_0 e^{-kz} \hat{k}$

Legge di Archimede → Il corpo riceve una spinta verso l'alto pari al volume di fluido spostato (19)
 Corpo di densità ρ_c , immerso in un fluido ρ_f



Equilibrio → $F_{verticali} = 0$

↳ $F_{sup} + F_{peso} = F_{inf}$
 $\rho(z)S + \rho g V = \rho(z+h) \cdot S$

$(\rho(z)h - \rho(z))S = \rho_c V_g$

$\rho_f g h$

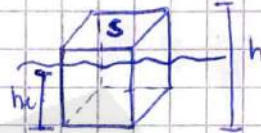
$\rho_f g h S = \rho_c V_g$

→ risultante forze. Facce sup e inf dovute al corpo immovente

SPINTA DI ARCHIMEDE → $\rho_f V_{fluido\ spostato} \cdot g \Rightarrow \rho_f V_g$

$\rho_c V_g = \rho_f h S g$
 peso del corpo = peso del fluido spostato

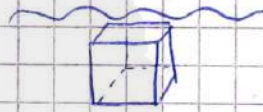
• Se $\rho_c < \rho_f$, il corpo emerge parzialmente dall'acqua per trovare l'equilibrio. **Condizione di equilibrio.**



$P = Sa$

EQUILIBRIO

• Se $\rho_c = \rho_f$, il corpo è immerso nel fluido ed è in equilibrio. **Condizione limite di equilibrio.**



• Se $\rho_c > \rho_f$, il corpo affonda con accelerazione $< g$

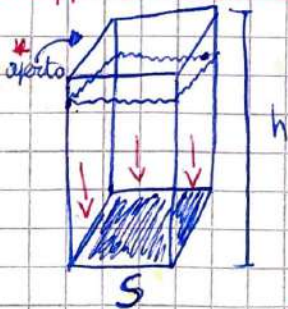
$a = \frac{F_p - F_s}{m}$

$a = \frac{\rho_c V_g - \rho_f g V}{\rho_c V}$

$\frac{\rho_c - \rho_f}{\rho_c} g = a$

acc. discesa di un corpo in un fluido

Legge di Stevino → esprime il valore di pressione esercitata da un fluido su un corpo immerso al suo interno



fluido ρ_f

Se S viene esercitata la F_{peso}

$p = \frac{F_{\perp}}{S} = \frac{\rho_f S h g}{S} = \rho_f g h = \text{pressione}$

* Se è aperto in superficie, $p_{tot} = \rho_f g h + p_{atmosferica}$

La pressione dipende dalla quota e non dalla quantità del fluido

UNITÀ DI MISURA di $p = \frac{N}{m^2} = Pa$ (Pascal)

1 atmosfera = 1 atm → pressione al livello del mare a 0°

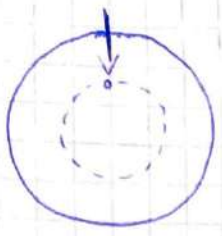
1 atm = $1,013 \cdot 10^5 Pa$

1 bar = $10^5 Pa$

1 Torr = 1 mm Hg (mercurio) 760 Torr = 1 atm

PRINCIPIO DI PASCAL

→ da pressione esercitata in un punto di un fluido, si trasmette inalterata a tutti i punti del fluido (o tutte le superficie a contatto con il fluido). La pressione è la stessa in tutti i punti



TEOREMA DI TORRICELLI

→ $v = \sqrt{2gh}$ → se viene praticato un foro ad una profondità h la velocità del fluido è v

TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI

→ $I_{z'} = I_z + M \cdot R^2$

↑ momento d'inerzia rispetto all' vecchio asse
 ↓ R = distanza tra i due assi (z')
 ↓ $M \cdot R^2$ = momento d'inerzia rispetto al vecchio asse

Momento d'inerzia di un asse parallelo



asse \perp alla superficie del disco (va verso l'alto) (passante per il centro)

CALORIMETRIA

→ corpi solidi o liquidi \Rightarrow non ci siano "apprezzabili" variazioni di volume quando varia la temperatura

TEMPERATURA

→ è un indice di stato (quantifica la sensazione di caldo e freddo)
 ↳ "etichetta" per caratterizzare una proprietà di un corpo.
 ↳ la differenza tra due stati di stato, è una **quantità**
passaggio di stato → la temperatura è costante finché non è stato completato il passaggio di stato
 ↳ processo nel quale si fornisce energia per modificare i legami tra le molecole dell'elemento e far eseguire il passaggio del sistema.

CALORE

→ È un' "energia". Nessun corpo possiede calore. I corpi trasferiscono calore (ceduto o acquisito). Non si può parlare di differenza di calore → come per il lavoro.
 ↳ forma di energia in transito. Il calore si sposta spontaneamente da un corpo a temperatura maggiore, a uno a temperatura minore.

$Q =$ Calore → caloria (cal) → quantità di calore per far aumentare di $1^\circ C$ la temperatura di una massa = $1g$ di H_2O

$\Delta T =$ variazione di temperatura

$C =$ la quantità di calore necessaria a far variare di $1^\circ C$ la temperatura del corpo.

$c =$ calore specifico della sostanza, capacità termica della massa unitaria, oppure è la quantità di calore necessaria a far variare di $1^\circ C$ la temperatura della massa unitaria. ($\frac{cal}{^\circ C \cdot g}$, $\frac{J}{^\circ C \cdot kg}$)

$1 \text{ cal} \leftarrow 4,186 \text{ J}$
 $1 \text{ Kcal} \leftarrow 10^3 \text{ cal} = \text{Cal}$

Temp equilibrio = $\frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2}{m_1 + m_2}$

$\Delta T = \frac{Q}{m} \cdot K$ → costante
 ↳ $K = \frac{1}{c}$

$M = V \cdot \text{densità}$
 Conduzione di calore = $Q = \lambda \cdot S \cdot \frac{T_1 - T_2}{\text{distanza}}$

Minimizzare la Temperatura $\frac{\Delta T}{T_{\text{misurata}}}$

Se la Temp misurata = T da misurare, fatto $T_{\text{da misurare}} - T$ molto minore di 1 , allora la misurazione della T è esatta

$C = \frac{Q}{\Delta T}$ → capacità termica, costante caratteristica del corpo

↳ $dQ = f(m)cdt = Q = mc\Delta T$ (se il calore specifico NON dipende dalla temperatura)

$C = cm \rightarrow c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\Delta T} \rightarrow Q = mc\Delta T$ → equazione fondamentale della termologia

Se il calore specifico dipende dalla temperatura → $Q = \int dQ = \int m(c(T)dt) \rightarrow$ integrano anche c

CONVENZIONE → $Q > 0$ calore acquisito + T
 $Q < 0$ calore ceduto - T

SISTEMA ISOLATO $\Rightarrow |Q_{\text{ceduto}}| = |Q_{\text{acquisito}}|$
 $-Q_{\text{ceduto}} = Q_{\text{acquisito}}$

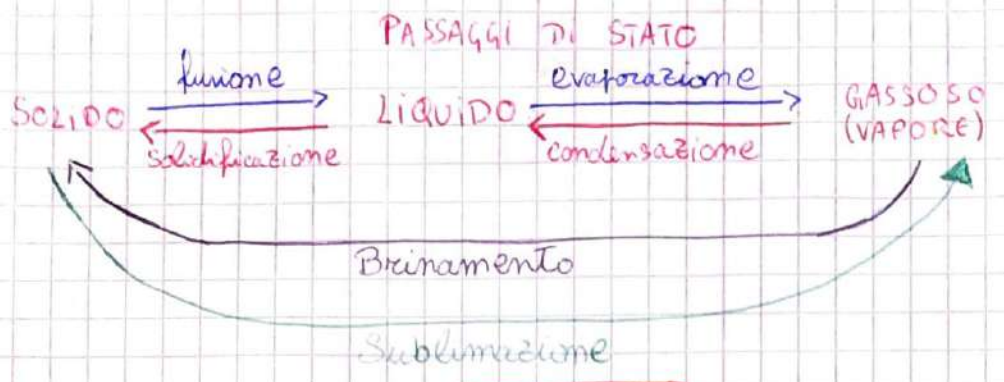
$|m_1 c_1 \Delta T_1| = |m_2 c_2 \Delta T_2|$

Temperatura → scale centigrade

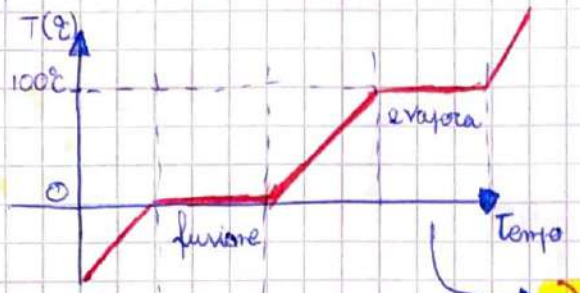
CELSIUS $100^\circ C \longleftrightarrow 373,15 \text{ K}$

$0^\circ C \longleftrightarrow 273,15 \text{ K}$

$-273,15^\circ C \longleftrightarrow 0 \text{ K} \rightarrow 0$ assoluto (non raggiungibile)



fornisco potenza costante $P \Rightarrow Q = P \cdot T$



Aumenta la temperatura solo quando tutto il sistema è passato di stato.

$\lambda = \frac{Q}{m}$ Quantità di calore per fare passare di stato la massa unitaria di quella sostanza.
 calore latente $\rightarrow \frac{J}{kg}$, $\frac{cal}{g}$

$\lambda = \frac{Q}{m} \rightarrow Q = \lambda m$ nei passaggi di stato

$\lambda_f = 79 \frac{cal}{g}$
fusione
solidificazione

$\lambda_v = 343 \frac{cal}{g}$
evaporazione
condensa

(non c'è variazione di temperatura)

TERMODINAMICA

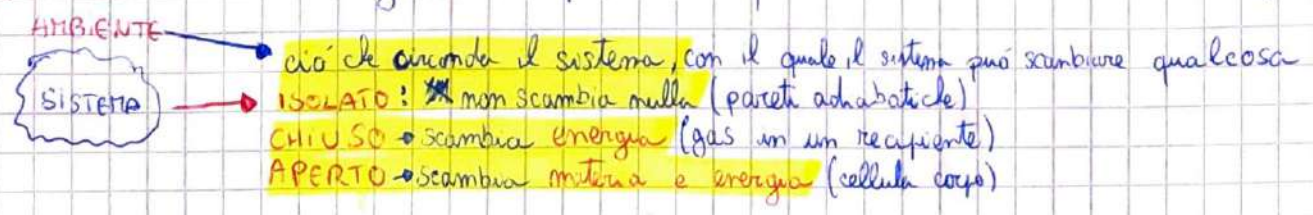
Principio "zero" \rightarrow Se A è in equilibrio termico con B e B è in equilibrio termico con C, allora A è in equilibrio termico con C.

GAS IDEALI o PERFETTI \rightarrow Sistema fluido comprimibile

- \rightarrow Le molecole puntiformi (dimensioni trascurabili) rispetto al volume
- \rightarrow Le interazioni fra molecole sono trascurabili. Non ci sono forze d'interazione
- \rightarrow Le uniche interazioni che si considerano, sono gli urti: tra molecole e tra molecole e pareti del recipiente \rightarrow urti elastici (si conserva E_k del sistema)
- \rightarrow Può essere qualunque tipo di gas, a condizione che il gas sia lontano dal punto di condensazione

I gas perfetti (cioè tutti i gas, se portati in questa condizione), seguono un comportamento universale

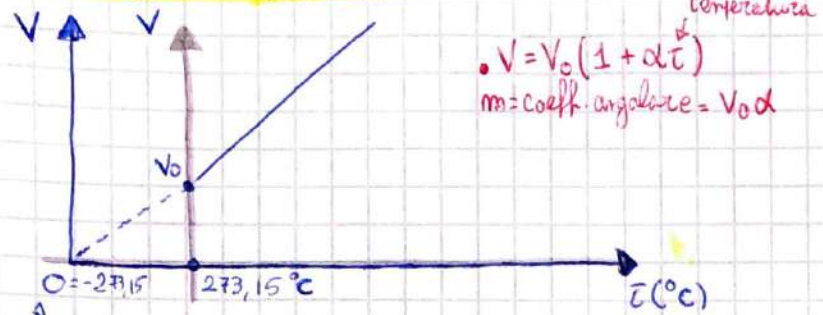
- VARIABILI DI STATO** \rightarrow condizione di equilibrio in tutti i punti del sistema (ane x)
 - \rightarrow Volume (V), pressione (P), temperatura (T)
- FUNZIONI DI STATO** \rightarrow grandezze esprimibili in funzione delle variabili di stato (ane y)



Gli scambi di energia sono sottoforma di **calore** e **lavoro (termodinamico esterno)**
 \rightarrow lavoro compiuto dalla pressione
 \rightarrow è uguale in tutti i punti del gas

LEGGI DEI GAS: 1^a e 2^a leggi di Gay-Lussac

• Variare il volume, mantenendo costante la pressione
 $P = \text{costante} \rightarrow$ ISOBARA



$V = V_0(1 + \alpha \Delta T)$
 $\alpha = \text{coeff. angolare} = V_0 \alpha$

$V = \alpha T$

$\frac{V}{T} = \text{costante}$

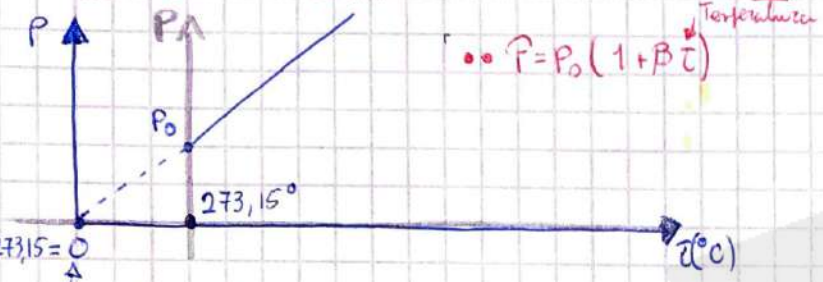
$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$

muova y del sistema Scala assoluta o scala Kelvin

$\alpha = \beta = \frac{1}{273,15} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

$T(K) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,15$

• Variare la pressione, mantenendo il volume costante
 $V = \text{costante} \rightarrow$ ISOCORA



$P = P_0(1 + \beta \Delta T)$

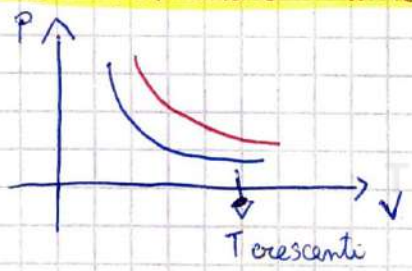
$P = b \cdot T$

$\frac{P}{T} = \text{costante}$

muova y del sistema Scala assoluta o scala Kelvin

III legge dei Gas \rightarrow LEGGE DI BOYLE

• Temperatura assoluta costante
 $T = (\text{temperatura assoluta}) = \text{costante} \rightarrow$ ISOTERMIA



$p \cdot V = \text{costante}$
 \downarrow
 dipende da T

MOLE \rightarrow quantità di sostanza (mole). 1 mole corrisponde a un numero di entità elementari (atomi o molecole nei gas) pari a quelle contenute in 12g dell'isotopo ^{12}C (carbono con 6 protoni e 6 neutroni)

Numero di Avogadro = $6,022 \cdot 10^{23}$ $\frac{\text{particelle}}{\text{mole}}$ (numero di particelle contenute in una mole)

n \rightarrow simbolo per il numero di moli. $\text{mol} \rightarrow$ unità di misura $\rightarrow N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
 Legame tra mole e massa \rightarrow Es: Azoto

14
N
7

\rightarrow numero di massa, massa molecolare
 $M = 14$, numero di massa $M = 14 \text{ g/mole}$
 \rightarrow protoni nel nucleo.

massa
 $m = M \cdot n$
 \uparrow massa molecolare \downarrow numero di moli

Calore specifico molare $P_{\text{cost}} = C_P = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P \rightarrow Q_P = m C_P T$
 $Q_P = U$
 Calore specifico molare $V_{\text{cost}} = C_V = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V \rightarrow Q_V = m C_V T$
 $Q_V = U$

$n = \frac{m}{M}$
 \uparrow moli \downarrow massa molecolare

Denrità molecolare $\Rightarrow N = \frac{\text{numero molecole}}{\text{volume}}$
 Calore spec \downarrow volume

moli $\Rightarrow n = \frac{\text{numero molecole}}{N_{\text{AVOGADRO}}}$

Calore specifico molare = $C \cdot M \rightarrow$ massa molecolare
 $m = \frac{NV}{N_{\text{AVO}}}$

Legge di Avogadro → Se p e T sono le stesse, anche per gas diversi il volume (23) è proporzionale al numero di moli.

Volume uguali di gas diversi, hanno lo stesso numero di moli ⇒ $\frac{V}{n} = \text{costante}$ per tutti i gas

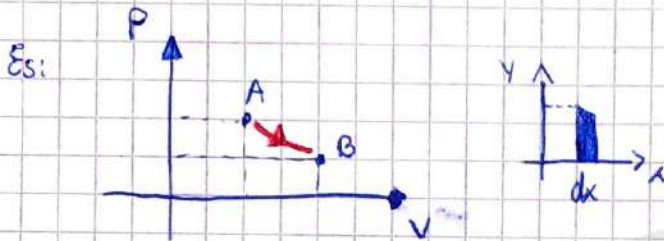
Volume molare standard → Es: a $T = 0^\circ\text{C}$ $p = 1 \text{ atm}$ | condizioni
 $V_m = 22,414 \text{ L}$

EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI → $pV = nRT$

$$p \frac{V}{n} = RT$$

$$R = \text{costante} = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

→ $pV = nRT$ → eq di stato
 $T(V) = aV - bV^2$
 T = Temperatura in Kelvin (unità di misura) = $\text{Pa} \cdot \text{m}^3 = \text{mol} \cdot \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot \text{K}$
 $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3 = \text{J} \rightarrow pV = \text{energia Joule}$



X → Variabile estensiva (Volume)
 Y → Variabile intensiva (p, T, densità)
 $y dx = dE$ (energia)
 Y e X sono coniugate

Nel grafico possono essere rappresentati solo stati di equilibrio (come A e B). Un gas che si espande, cambia stato di equilibrio.

↓ **Trasformazione** → processo che permette di passare dallo stato di equilibrio A, allo stato di equilibrio B.

TRASFORMAZIONE **quasi statica** → pressione e volume variano lentamente

EQUILIBRIO TERMODINAMICO →

TERMICO

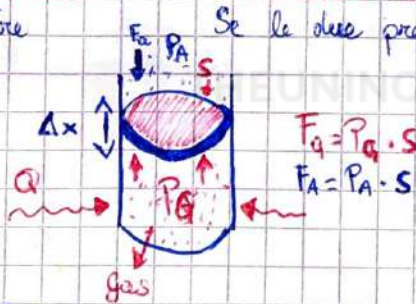
MECCANICO

$T_{\text{ sistema }} = T_{\text{ ambiente }}$
 le due temperature sono uguali.

$P_{\text{ sistema }} = P_{\text{ ambiente }}$

Se le due pressioni sono uguali $P_A = \text{pressione atmosferica}$
 $P_G = \text{pressione gas}$

$$T_e > T_g$$



Se $P_g \neq P_A \Rightarrow$ Forza sul pistone

Se non c'è equilibrio termico, scambio di calore
 Se non c'è equilibrio meccanico, scambio di lavoro

Cilindro con pistone mobile

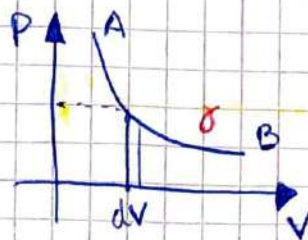
$$\text{Es: } P_g > P_A \quad F_g = P_g \cdot S$$

LAVORO GAS = $F_g \cdot \Delta x = P_g \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{\Delta V} \rightarrow P_g \Delta V$ | **LAVORO TERMODINAMICO** → variazione di volume area sottesa al volume

$$\text{LAVORO: } \delta L = p \cdot dV$$

$$L = \int P(V) dV$$

↓ lavoro infinitesimo



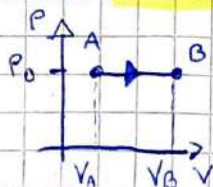
$$\delta L = p dV$$

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B P(V) dV$$

LAVORO ISOCORA = 0

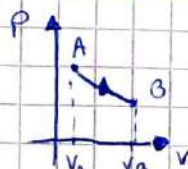
LAVORO ADIABATICA = $-\Delta U = -m c_v \Delta T$

PRIMA LAVORO ISOBARA $p = p_0$



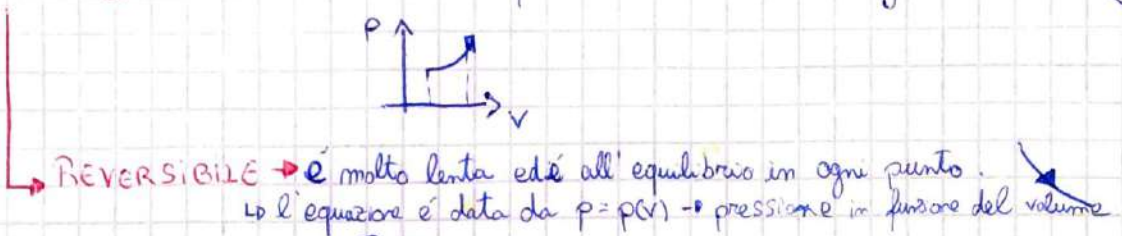
$$L_{AB} = p_0 \Delta V = p_0 (V_B - V_A)$$

LAVORO ISOTERMA $T = T_0$ da eq di stato



$$L_{AB} = \int_{A \rightarrow B} p(V) dV = nRT_0 \cdot \int_{V_A}^{V_B} \frac{1}{V} dV = nRT_0 \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} = Q$$

TRASFORMAZIONE - QUASI-STATICA = lentamente pressione e volume vengono variati

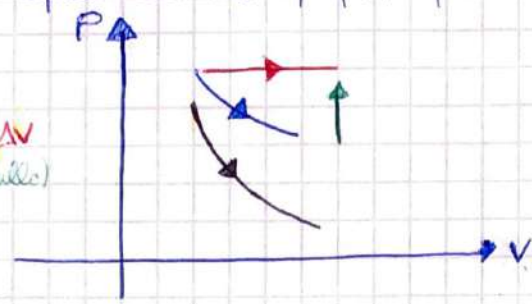


ISOTERMA → $T = T_0 \rightarrow \text{cost} \rightarrow p(V) = \frac{nRT_0}{V} = L$

ISOBARA → $p = p_0 \rightarrow \text{cost} \rightarrow p = p_0 \rightarrow L = p_0 \cdot \Delta V$

ISOCORA → $V = V_0 \rightarrow \text{cost} \rightarrow \text{Lavoro} = 0$ (nullo)

ADIABATICA → $Q = 0 \rightarrow$ non c'è scambio



TRASFORMAZIONI IRREVERSIBILI → così veloce da fare delle fluttuazioni (il sistema non è all'equilibrio finché non completa la trasformazione)
↳ fluttuazioni → transitori

CONVENZIONI → Se il gas espande, il lavoro è positivo
 $L > 0$ espansione → (fatto dal sistema sull'ambiente)
 $L < 0$ compressione
 $Q > 0$ quando è assorbito
 $Q < 0$ quando è ceduto.

Se il sistema scambia energia con l'ambiente esterno → scambia calore Q , lavoro L , allora la sua energia si calcola:

ENERGIA INTERNA → Energia macroscopica, data dalla somma delle energie delle singole particelle che compongono il sistema.
 U → simbolo energia interna

ENERGIA INTERNA NEI GAS PERFETTI → l'energia potenziale è trascurata. La somma delle energie cinetiche delle particelle, ossia l'energia interna.

$U_{\text{gas perfetto}} \rightarrow \sum_{v=1}^n \frac{1}{2} m v^2$ → velocità quadratica media (le molecole hanno tutte velocità diverse)

$E_k \text{ media} \rightarrow \langle E_k \rangle$ → energia cinetica media →
 • gas monoatomici → un atomo → 3 gradi di libertà
 • gas biatomici → due atomi → 5 gradi di libertà
 • gas poliatomici → tre atomi spuri → 6 gradi di libertà

$\langle E_c \rangle$ → gradi di libertà • $\frac{1}{2} k_B T$ →
 gas monoatomici (gas nobili) = $\frac{3}{2} k_B T$
 gas biatomici (idrogeno, ossigeno) = $\frac{5}{2} k_B T$
 gas poliatomici (altri gas) = $6 \cdot \frac{1}{2} k_B T \Rightarrow 3 k_B T$

Ogni grado di libertà corrisponde un'energia → proporzionale a $T(K)$ → $E = \frac{1}{2} k_B T$

$k_B =$ costante di Boltzmann → $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

$U = (f \cdot \frac{1}{2} k_B T) \cdot N$ ← numero di molecole
 (f = gradi di libertà)
 oppure $U = \frac{m}{2} R T$ oppure $U = m c_v T$
 $m = N \cdot N_{\text{AVOGADRO}}$
 $N_{\text{AVOGADRO}} \cdot k_B = R$

Esempio ossigeno (biatomico) $T = 300 \text{ K} \rightarrow \langle E_c \rangle = \frac{5}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot 300 \text{ K} \Rightarrow 1035 \cdot 10^{-23} \text{ J} \approx 1 \cdot 10^{-20} \text{ J}$

capacità termica
 $c_p \text{ monoatomici} = \frac{5}{2}$
 $c_p \text{ biatomici} = \frac{7}{2}$
 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
 $\gamma \text{ monoatomici} = \frac{5}{3}$
 $\gamma \text{ biatomici} = \frac{7}{5}$
 $c_v \text{ mono} = \frac{3}{2} R$, $c_v \text{ biatomico} = \frac{5}{2} R$, $c_v \text{ poli} = 3R$
 $c_p - c_v = R$
 ↳ MAYER.

1° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA → conservazione energia Termodinamica
(valido non solo per gas perfetti) (sistema chiuso)

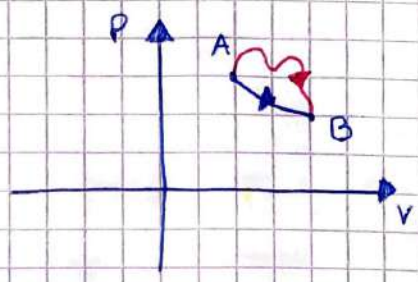
$$\Delta U = Q - L$$

Convenzione $Q > 0$ *assorbito*
 $L > 0$ *ceduto* → fatto dal sistema

(è valido anche se la trasformazione è irreversibile)

TRASFORMAZIONE INFINITESIMA → $dU = \delta Q - \delta L$

d → differenziale di una funzione di stato
 δ → quantità infinitesima, non sono funzioni di stato, dipendono dalla trasformazione
↳ Q, L di AB , sono diversi da Q, L di AB



$$\int_{A \rightarrow B} dU = \int_{A \rightarrow B} \delta Q - \int_{A \rightarrow B} \delta L \Rightarrow U_B - U_A = \dots - \int_{V_A}^{V_B} p(V) dV$$

↳ l'equazione della trasformazione (della curva)

CASI PARTICOLARI DEL PRIMO PRINCIPIO

- ISOTERMA → $T = \text{cost}$, $U = \text{costante}$ (gas perfetto)

$$\Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow Q = L$$

- ISOCORA → $V = \text{cost}$, $L = 0$

$$\Rightarrow \Delta U = Q \quad \text{↳ calore scambiato} \quad Q_V = n c_V \Delta T$$

- ISOBARA → $P = \text{cost}$ $Q_P = L + \Delta U$

$$Q_P = n c_P \Delta T \quad c_P = c_V + R$$

↳ calore scambiato

- ADIABATICA (senza scambio di calore) $Q = 0$

$$\Rightarrow L = -\Delta U \quad S = 0 \text{ (adiabatica reversibile)} \quad \Delta S > 0 \text{ (adiabatica irreversibile)}$$

Calori specifici dei gas → calori specifici molari (GAS)

$$Q = m c \Delta T$$

solidi, liquidi

↳ dobbiamo specificare il tipo di trasformazione $Q_{\alpha} \rightarrow p = \text{cost} \text{ o } v = \text{cost} \dots$

$$\delta Q_{\alpha} = c_{\alpha} m dT$$

$$c_{\alpha} \rightarrow \text{calore specifico molare} \rightarrow c_{\alpha} = \frac{1}{n} \frac{\delta Q_{\alpha}}{dT} \Rightarrow \left(\frac{J}{mol \cdot K} \right) \Rightarrow c_V + p \frac{dV}{n dT}$$

↳ ES: ISOCORA → VOLUME COSTANTE *↳ casi particolari*
↳ $\delta Q_V = c_V n dT$, ma $\delta Q_V = dU \Rightarrow dU = n c_V T$

$$U = \frac{1}{2} f n R T \quad \text{es: monoatomico} \rightarrow U = \frac{3}{2} n R T$$

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{3}{2} R \rightarrow \text{monoatomico} \\ c_V &= \frac{5}{2} R \rightarrow \text{biatomico} \\ c_V &= 3 R \rightarrow \text{poliatomico} \end{aligned}$$

⇒ Calore specifico molare a volume costante

Calcolo calore specifico molecolare a $v = \text{cost}$ → $\frac{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}{n_1 + n_2}$ ↳ tra due gas

Calore specifico molare isobara (Pressione costante) $\delta Q_p = mc_p dt$

$\delta Q_p = dU + \delta L$ (primo principio termodinamica) $U = mc_v T$

$\delta Q_p = mc_v dT + p dV$ da $pV = mRT$
 differenziale dell'eq. \Rightarrow

$\delta Q_p = mc_v dT + mR dT$ $p dV + V \frac{dp}{p} = mR dT$

$\delta Q_p = m(c_v + R) dT = mc_p dT$ $p dV = mR dT$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow \gamma = \frac{c_v + R}{c_v} \Rightarrow \gamma = 1 + \frac{R}{c_v}$
 γ monoatomici = 5/3
 γ biatomici = 7/5

$c_p = c_v + R$ \rightarrow relazione di MAYER

$c_p > c_v$ perché un po' di calore è usato per espandersi

| | |
|---|-----------------------|
| Gas monoatomico $\rightarrow c_v = \frac{3}{2} R$ | $c_p = \frac{5}{2} R$ |
| biatomico $\rightarrow c_v = \frac{5}{2} R$ | $c_p = \frac{7}{2} R$ |
| poliatomico $\rightarrow c_v = 3 R$ | $c_p = 4 R$ |

c_p potrebbe non essere costante (dipende dalla Temperatura)
 Lo è costante solo per le trasformazioni isocore, isobare, politropiche

ENERGIA INTERNA GAS PERFETTI $\rightarrow U = N \cdot \frac{f}{2} k_B T$ (N=numero molecole, f=gradi di libertà)

$N = n \cdot N_{AVOGADRO}$
 $N_{AVOGADRO} \cdot k_B = R$

$U = n N_{AVOGADRO} \frac{f}{2} k_B T \Rightarrow U = n \frac{f}{2} RT$

$U = mc_v T$ oppure

| | | |
|---------------|-------|---------------------|
| • monoatomici | 3 | $\frac{3}{2} k_B T$ |
| • biatomici | 3+2=5 | $\frac{5}{2} k_B T$ |
| • poliatomici | 3+3=6 | $3 k_B T$ |

Grad di libertà

$\Delta U = C \Delta T$
 \rightarrow capacità termica

$TV^{\delta-1} = cost$ o $PV^\delta = cost$

EQUAZIONE TRASFORMAZIONE ADIABATICA \rightarrow non viene scambiato calore

Dal primo principio ($\delta Q = 0$) $\Rightarrow dU = -\delta L$

esplicito: $mc_v dT = -p dV$

uso $pV = mRT$ per "ridurre" le variabili $p = \frac{mRT}{V}$

$mc_v dT = -R \frac{T}{V} dV$, separo le variabili

$\frac{c_v dT}{T} = -R \frac{dV}{V} \Rightarrow$ integro tra uno stato iniziale e un generico stato finale.

$c_v \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = -R \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} \Rightarrow c_v \ln \frac{T}{T_0} = -R \ln \frac{V}{V_0}$

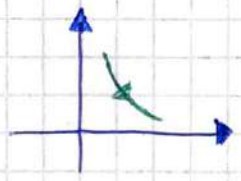
$\ln \left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_v} + \ln \left(\frac{V}{V_0}\right)^R = 0 \Rightarrow \ln \left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_v} \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right)^R \right] = 0$ (Se il log è 0, l'argomento è 1)

$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_v} \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right)^R = 1$ elevo a $\frac{1}{c_v} \Rightarrow \left(\frac{T}{T_0}\right) \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{R}{c_v}} = 1 \Rightarrow TV^{\frac{R}{c_v}} = T_0 V_0^{\frac{R}{c_v}}$
 valore numerico = cost

definendo $\delta = \frac{c_p}{c_v}$ (coeff. adiabatico) $\rightarrow \delta = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} \rightarrow \frac{R}{c_v} = \delta - 1$

$\delta > 1$

$TV^{\delta-1} = cost$ oppure $PV^\delta = cost$ \rightarrow uso $pV = mRT \Rightarrow T = \frac{pV}{mR} \rightarrow \frac{pV}{mR} \cdot V^{\delta-1} = cost$



TRASFORMAZIONI POLITROPICHE → calore specifico lungo la trasformazione è costante (27)

TRASFORMAZIONI QUASI STATICHE → ISOTERMA → $K = \infty$ e $c = \infty$
 ADIABATICA → $K = CV/R$ e $c = 0$
 ISOBARA → $K = -1$ e $c = CV + R = CP$
 ISOCORA → $K = 0$ e $c = CV$

Teq → $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \rightarrow m_1 c_{v1} (T - T_1) + m_2 c_{v2} (T - T_2) = 0$ $T = \frac{m_1 c_{v1} T_1 + m_2 c_{v2} T_2}{m_1 c_{v1} + m_2 c_{v2}}$
 Temperatura di equilibrio →

VAPORIZZAZIONE → $\Delta V = \left(\frac{m}{P_v} - \frac{m}{P_a} \right)$

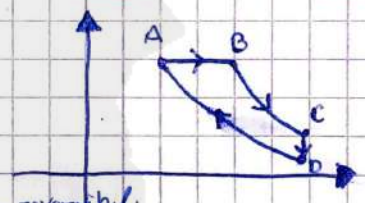
EQUIVALENTE IN ACQUA DEL CALORIMETRO → $m_e = \frac{m_2 (T_2 - T_e) + m_1 (T_1 - T_e)}{T_e - T_2}$

SE IL CALORIMETRO HA UNA MASSA allora si somma alla massa d'acqua. Se del calorimetro conosciamo anche il calore specifico, allora $Q_{calor} + Q_{acq} + Q_{elast} = 0$

TEMPERATURA EQUILIBRIO CALORIMETRO → $T_{eq} = \frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2}{m_1 + m_2}$

MACCHINA TERMICA → dispositivo che trasforma in lavoro il calore anzichè
 trasformazione chiusa o ciclo → $\Delta U = 0$
 ⇒ $Q_{metto} = L_{metto}$

$Q_{metto} = Q_{anzichè} - |Q_{ceduto}|$
 $L_{metto} = L_{fatto dal sistema} - |L_{fatto sul sistema}|$



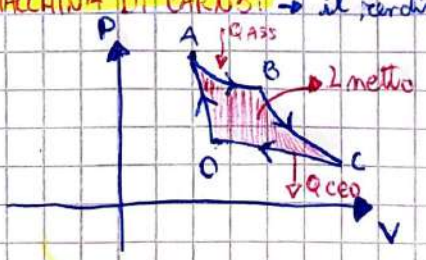
Macchina reversibile → tutte le trasformazioni sono reversibili.
 Macchina irreversibile → anche solo una trasformazione non è reversibile.

RENDIMENTO → η oppure ρ . $\eta = \frac{L_{metto}}{Q_{anzichè}} \rightarrow \eta = \frac{Q_{ASS} - |Q_{ceduto}|}{Q_{ASS}} < 1$

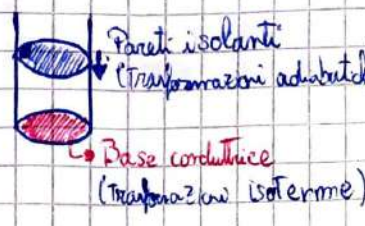
SECONDO PRINCIPIO → Irreversibilità dello 0° anzichè

ENUNCIATO DI KELVIN
 Non è possibile avere un dispositivo che operi in modo ciclico (macchina termica) trasformando tutto il calore estratto da una sorgente in lavoro.
 Non è possibile avere un dispositivo macchina termica, che funzioni scambiando calore con una sola sorgente.

MACCHINA DI CARNOT → il rendimento dipende solo dalle temperature

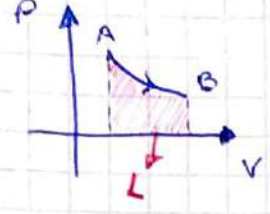


$\eta = \frac{L_{metto}}{Q_{ASS}}$
 $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

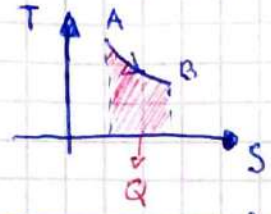


- A → B ISOTERMA, T_1 $Q_2 = L_1$ (metto a contatto il cilindro con un dispositivo a temperatura T_2)
- B → C ADIABATICA, $T_2 (< T_1)$ $Q = 0$ $L_3 = -\Delta U$ (metto a contatto il cilindro con una superficie a T_2 per una trasformazione adiabatica)
- C → D ISOTERMA, T_2 $Q_2 = L_2$ $Q_{ceduto} < 0$
- D → A ADIABATICA, $T_2 \rightarrow T_1$ $Q = 0$ $L_3 = -\Delta U$

LAVORO $\delta L_{\text{REVERSIBILE}} = pdV \rightarrow p(V)$



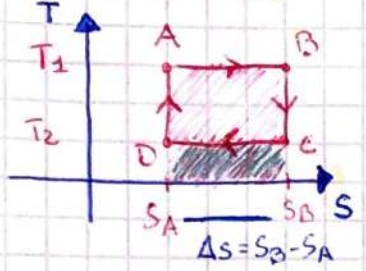
SCAMBIO TERMICO $\delta Q_{\text{REVERSIBILE}} = TdS$



$S = \text{entropia}$
 \downarrow
 funzione di stato
 (come volume, energia)

- $dS = \frac{\delta Q_{\text{REVERSIBILE}}}{T}$ (ISOTERMA) \rightarrow calore scambiato
- $\Delta S = \int_{A \rightarrow B} \frac{\delta Q_{\text{REV}}}{T}$ (NON ISOTERMA)

CICLO DI CARNOT



Una trasformazione adiabatica reversibile è detta anche **isocritica** $\rightarrow \Delta S = 0$

$dS = \frac{\delta Q_{\text{REV}}}{T}$

- A \rightarrow B isoterma
- B \rightarrow C isocritica
- C \rightarrow D isoterma
- D \rightarrow A isocritica

$Q_{\text{ASS}} = Q_2 = Q_{A \rightarrow B} = T_1 \cdot \Delta S$

$Q_{\text{CED}} = Q_1 = Q_{C \rightarrow D} = T_2 \cdot \Delta S$

$\eta = 1 - \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right| = 1 - \left| \frac{T_2 \Delta S}{T_1 \Delta S} \right|$

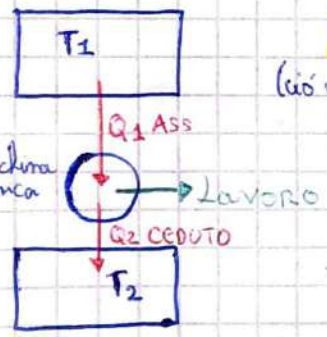
$\eta_{\text{C}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

ENUNCIATO DI CLAUSIUS

Secondo principio (del frigorifero) \rightarrow Non è possibile avere come **unico** risultato di una trasformazione il passaggio di calore da una sorgente a temperatura T_1 a una sorgente a temperatura T_2 $T_2 > T_1$ \rightarrow non è mai spontaneo!

MACCHINA FRIGORIFERA

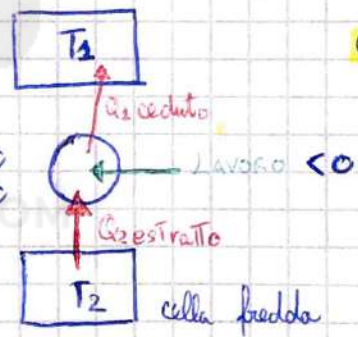
MACCHINA TERMICA



$Q_1 = Q_2 + L$
 (ciò che è entrato = ciò che è uscito)

$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

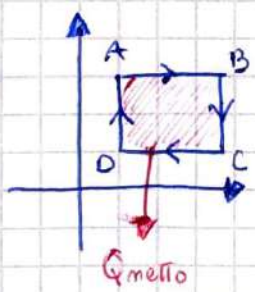
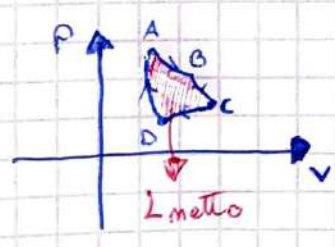
$\eta_{\text{C}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$



$Q_2 + L = Q_1$

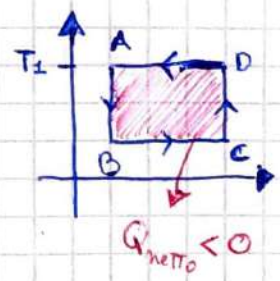
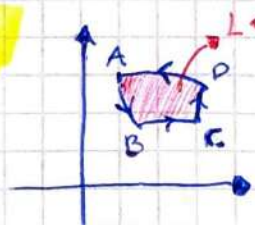
$Q_2 > 0$
 $Q_1 < 0$
 LAVORO < 0

cella fredda



$\epsilon = \frac{Q_2}{L}$

efficienza frigorifera

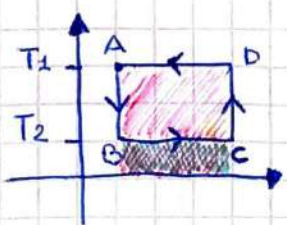


CICLO FRIGORIFERO: Efficienza

$\epsilon = \frac{Q_{\text{estratto}}}{\text{Lavoro entrante}} = \frac{Q_2}{L}$

CARNOT $\rightarrow \epsilon_{\text{C}} = \frac{Q_2}{L} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$

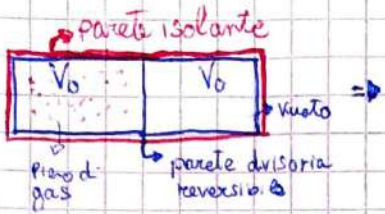
$\epsilon_{\text{C}} = \frac{T_2 \Delta S}{T_1 \Delta S} \rightarrow \epsilon_{\text{C}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$



$Q_{D \rightarrow A} = Q_{\text{ceduto}} = Q_1 (< 0)$

$Q_{B \rightarrow C} = Q_{\text{estratto}} = Q_2 (> 0)$

ESPANSIONE ADIABATICA LIBERA (GAS PERFETTO)



↳ il gas si espande senza compiere lavoro.

Essendo adiabatica, $Q=0 \Rightarrow \Delta U=0$ per il primo principio
Essendo libera, $L=0$

Gas perfetto $\Rightarrow mc_v \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow T_i = T_f$ (non cambia)

Per calcolare l'entropia, devo utilizzare un'altra trasformazione, quindi scelgo di utilizzare l'isoterma in quanto la temperatura è sempre costante (si comporta come un'isoterma, ma non lo è)

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{reversibile}}}{T} \stackrel{\text{1° principio}}{=} \frac{\delta L + dU}{T} = \frac{pdV + dU}{T} = \frac{mRT}{T \cdot V} dV + \frac{mc_v dT}{T} = \frac{mR dV + mc_v dT}{V T}$$

Per calcolare la variazione di entropia: (S/K)

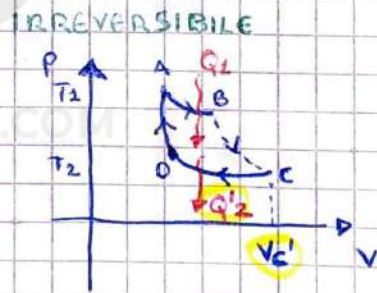
$$\Delta S_{A \rightarrow B} = \int_{S_A}^{S_B} dS = mR \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} + mc_v \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = mR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + mc_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

$$= mc_v \left[\frac{R}{c_v} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) \right] = mc_v \left[\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} + \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) \right]$$

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = mc_v \left[\ln \frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} \right] \quad \text{Valido per tutte le trasformazioni gas perfetto}$$

ENTROPIA \rightarrow misura della concentrazione dell'energia
 ↳ Se l'energia è concentrata, il valore è basso
 Se l'energia si distribuisce, il valore aumenta

CICLO DI CARNOT $Q_1 = \text{calore assorbito}, Q_2 = \text{calore ceduto} \quad Q_2 \neq Q_2', V_C \neq V_C'$



$$\eta_{\text{irrev}} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

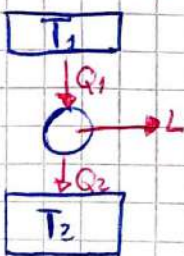
$$\eta_{\text{irrev}} = \frac{Q_1 - |Q_2'|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2'|}{Q_1}$$

Teorema di Carnot: qualunque macchina termica tra 2 sorgenti ha un η (rendimento) sempre inferiore a η_{Carnot} reversibile fra le stesse temperature.

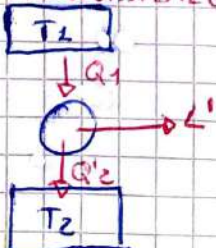
$$\Rightarrow \eta_{\text{irreversibile}} < \eta_{\text{reversibile}}$$

$$1 - \frac{|Q_2'|}{Q_1} < 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \Rightarrow |Q_2'| > |Q_2|$$

REVERSIBILE



IRREVERSIBILE



INDICAZIONI SULLA VARIAZIONE DI ENTROPIA (ΔS) (J/K)

Per la macchina, in un ciclo chiuso, $\Delta S = 0$

ΔS sull'adiabatica reversibile = 0
 ΔS sull'adiabatica irreversibile > 0

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

Se 2 sorgenti a temperatura T_1 e T_2

① cede $Q_1 \Rightarrow \Delta S_{sorgente 1} = -\frac{|Q_1|}{T_1}$ } ceduto dalla sorgente e assunto dalla macchina

② assorbe $Q_2 \Rightarrow \Delta S_{sorgente 2} = +\frac{|Q_2|}{T_2}$
 anche $Q'_2 \Rightarrow \Delta S_{sorgente 2} = +\frac{|Q'_2|}{T_2}$ } ceduto dalla macchina e assunto dalla sorgente

REVERSIBILE $\rightarrow \Delta S_{sistema} = \Delta S_{universo} = \Delta S_{macchina} + \Delta S_{sorgenti} \Rightarrow \Delta S_U = 0 + \frac{|Q_2|}{T_2} - \frac{|Q_1|}{T_1} = 0$

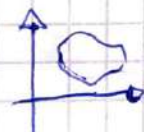
IRREVERSIBILE $\rightarrow \Delta S_U = 0 + \frac{|Q'_2|}{T_2} - \frac{|Q_1|}{T_1} > 0$
 ↳ perché $Q'_2 > Q_2$

$$\frac{|Q_2|}{T_2} < \frac{|Q'_2|}{T_2}$$

LEGGE ACCRESCIMENTO ENTROPIA $\rightarrow \Delta S_{universo} \geq 0$

- ↳ = 0 \rightarrow Reversibile
- ↳ > 0 \rightarrow Irreversibile

Per un ciclo chiuso, in cui venga scambiato calore con più sorgenti o infinite



SORGENTI FINITE

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

↳ reversibile

N = numero sorgenti

SORGENTI INFINITE

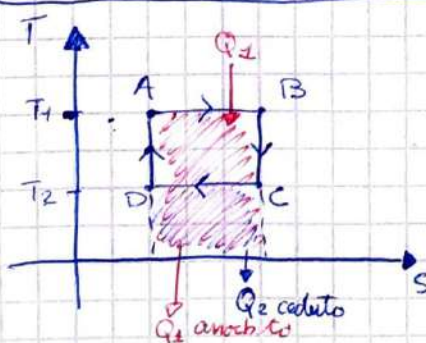
$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

↳ reversibile

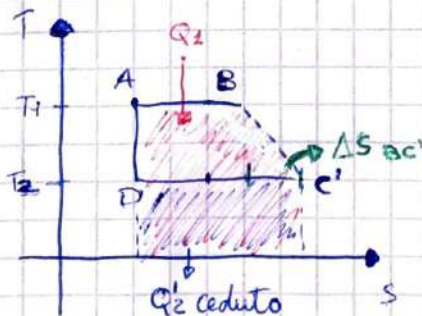
temperatura variabile.

INTEGRALE DI CLAUSIUS

DISEGUAGLIANZA DI CLAUSIUS



REVERSIBILE



Q_1 ASSORBITO

AB e AD sono uguali

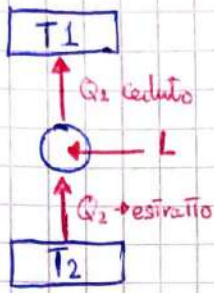
$$\frac{Q_2}{T_2} < \frac{Q'_2}{T_2}$$

$$Q_1 = Q_2$$

$$Q'_2 > Q_2$$

ΔS è un indice del grado di irreversibilità di una trasformazione

↳ (confrontare due processi e dire chi è più irreversibile) più ΔS è maggiore, più è irreversibile



Efficienza = $\frac{Q_2}{L}$ → minimizzare il calore estratto (Q_2)

CICLO DI CARNOT → $Eff = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$

$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$ → $Eff_e = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q_2} - 1} = \frac{1}{\frac{T_1 - 1}{T_2}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$

$\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ → in questo caso $=$ perché è reversibile

POMPA DI CALORE → massimizzare il calore ceduto alla sorgente più calda (Q_1)

$E_{pc} = \frac{Q_1}{L}$

CICLO DI CARNOT → $E_{pc} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$

CALCOLO ΔS

• processo in cui un solido o un liquido varia la sua T scambiando calore

$\Delta S_{AB} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{mc dT}{T} = mc \ln \frac{T_B}{T_A}$

• passaggi di stato $\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{m\lambda}{T}$

• gas perfetto: $\Delta S_{AB} = \int_{A \rightarrow B} \frac{\delta Q_{rev}}{T}$ $\delta Q = \delta L + dU$ → $\Delta S_{AB} = \int \frac{pdv}{T} + \int \frac{mcv dT}{T}$ ⇒

→ $\Delta S_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} \frac{dV}{T} + \int_{T_A}^{T_B} \frac{mcv dT}{T} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} + mcv \ln \frac{T_B}{T_A} =$

$R = c_p - c_v$ $\frac{R}{c_v} = \gamma - 1$

$= mcv \left[\frac{R}{c_v} \ln \frac{V_B}{V_A} + \ln \frac{T_B}{T_A} \right] = mcv \left[\ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} + \ln \frac{T_B}{T_A} \right] = mcv \ln \frac{T_B (V_B)^{\gamma-1}}{T_A (V_A)^{\gamma-1}}$

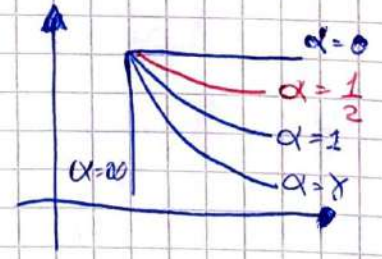
$T = \frac{pV}{nR}$ $= mcv \ln \frac{p_B V_B^\gamma}{p_A V_A^\gamma} = \Delta S_{AB} \text{ GAS PERFETTO}$

↳ se è un'adiabatica reversibile, l'argomento di ln è 1 e quindi $\Delta S = 0$

TRASFORMAZIONE POLITROPICA

$pV^\alpha = \text{costante}$ $C_\alpha = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta Q_\alpha}{T}$ → costante al variare di α fo diverse trasformazioni.

- $\alpha = 0$ → $p = \text{costante}$ ISOBARA
- $\alpha = 1$ → $T = \text{costante}$ ISOTERMA $\frac{1}{\alpha}$
- $\alpha = \infty$ → $pV^\alpha = K$ $V^\alpha = \frac{K}{p}$ → $V = \frac{K}{p^{1/\alpha}}$ → $V = \text{costante}$ ISOCORA
- $\alpha = \gamma$ → adiabatica



POLITROPICA → $pV^\alpha = \text{cost}$ $p_0 \rightarrow 3p_0$ $V_0 \rightarrow \frac{V_0}{2}$

$p_0 V_0^\alpha = 3 p_0 \left(\frac{V_0}{2} \right)^\alpha$ $V_0^\alpha = 3 \frac{V_0^\alpha}{2^\alpha}$ $1 = \frac{3}{2^\alpha}$ $2^\alpha = 3$ $\alpha = \log_2 3$ → $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 2}$