Tabella Integrali

Integrali	Primitive
1. $\int x^n dx$	1. $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int kdx$ con $k \in R$	2. $kx + c$
3. $\int x^{-1}dx \rightarrow \int \frac{1}{x}dx$	3. $ln\|x\| + c$
4. $\int e^x dx$	4. $e^x + c$
5. $\int a^x dx$	5. $\frac{a^x}{ln(a)} + c$
6. $\int sinxdx$	6. $-cosx + c$
7. $\int cosxdx$	7. $sinx + c$
8. $\int \frac{1}{cos^2x}dx$	8. $tanx + c$
9. $\int \frac{1}{sin^2x}dx$	9. $-cotanx + c$
10. $\int \frac{1}{x^2+1}dx$	10. $arctanx + c$
11. $\int \frac{1}{x^n}dx$	11. $\frac{-1}{n-1*x^{n-1}} + c$
12. $\int \sqrt{x}dx$	12. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
13. $\int \frac{1}{x^2+k^2}dx$	13. $\frac{1}{k}arctan\frac{x}{k} + c$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	14. $arcsinx + c$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx$	15. $arcsin\frac{x}{k} + c$
16. $\int \frac{x^3+3x^2}{x}dx \rightarrow \int \frac{x^3}{x} + \frac{3x^2}{x}dx$	16. $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$
17. $\int cos(2x)dx$	17. $\frac{sin(2x)}{2} + c$
18. $\int Shxdx$	18. $Chx + c$
19. $\int Chxdx$	19. $Shx + c$
20. $\int cos^2xdx \rightarrow \int \frac{1}{2}(1 + cos(2x))dx$	20. $\frac{1}{2}(x + \frac{sin(2x)}{2}) + c$
21. $\int sin^2xdx$	21. $-\frac{1}{2}sin(x)cos(x) + \frac{1}{2}x + c \rightarrow \frac{1}{2}(x - \frac{sin(2x)}{2}) + c$
22. $\int \frac{x}{1+x^2}dx$	22. $\frac{1}{2}ln\|1 + x^2\| + c$
23. $\int \frac{1}{sh^2x}dx$	

24. $\int \frac{1}{ch^2 x} dx$	23. $-cotanh x + c$
25. $\int sin^n dx$	24. $tanh x + c$
26. $\int cos^6 x dx$	25. $-\frac{1}{n} sin(x)^{n-1} cos(x) + \frac{n-1}{n} * \int sin(x)^{n-2} dx$
27. $\int \frac{1}{x^2-1} dx$	26. $\frac{1}{n} cos(x)^{n-1} sin(x) + \frac{n-1}{n} * \int cos(x)^{n-2} dx$
	27. $\frac{1}{2a} ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + c$

Integrali di funzioni composte

Integrali	Primitive
1. $\int [f(x)]^a * f'(x) dx$	1. $\frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c$ con $a \neq -1$
2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	2. $ln\lvert f(x)\rvert + c$
3. $\int f'(x) e^{f(x)} dx$	3. $e^{f(x)} + c$
4. $\int f'(x) a^{f(x)} dx$	4. $\frac{a^{f(x)}}{ln(a)} + c$
5. $\int f'(x) sin f(x) dx$	5. $-cos f(x) + c$
6. $\int f'(x) cos f(x) dx$	6. $sin f(x) + c$
7. $\int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)} dx$	7. $tan f(x) + c$
8. $\int \frac{f'(x)}{sin^2 f(x)} dx$	8. $-cot f(x) + c$
9. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx$	9. $arcsin f(x) + c$
10. $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx$	10. $arctan f(x) + c$

Integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$f'(x) \rightarrow integro \rightarrow f(x)$

$g(x) \rightarrow derivo \rightarrow g'(x)$

▼ Esempio

Esempio: (1)

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \frac{1}{\cancel{x}} dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

$f'(x) = x \quad f(x) = x^2/2$

$g(x) = \ln \quad g'(x) = \frac{1}{x}$

(2) $$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \sin x \, dx \rightarrow -\cos x \sin x - \int -\cos x \cos x \, dx$$

$f'(x) = \sin x \quad f(x) = -\cos x$

$g(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x$

$$\rightarrow -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \, dx = -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\cos x \sin x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx \rightarrow 2 \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \underline{\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cos x \sin x + c}$$

Integrazione per sostituzione

Se f è una funzione continua e g è una funzione derivabile con derivata continua, allora:

$$\int f'(g(u))g'(u)du = \begin{bmatrix} posto \\ g(u) = v \\ g'(u)du = dv \end{bmatrix} = \int f(v)dv$$

▼ Esempio

$$\int (sinx)^3 cosxdx$$

Poniamo $sinx = t$ e sviluppiamo la sua derivata per trovare dt

$$\begin{bmatrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{bmatrix}$$

Sostituiamo la t e dx nell'integrale e risolviamo, ricordandoci di sostituire nuovamente $sinx$ al posto della t una volta risolto l'integrale:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{sinx^4}{4} + c$$

Gli integrali come questo, si risolvono con la sostituzione della x con una funzione trigonometrica. In questo caso $x = sin(t)$

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx$$

Casi particolari - funzioni trigonometriche

$$\int cos^n x sin^m x dx$$

Caso 1 - Una delle due potenze *n* e *m* è dispari

Se solo una delle due potenze è dispari, la sostituzione consiste nel chiamare ***u*** la funzione con la potenza pari, mentre quella con la potenza dispari viene "*spezzata*" in due: la singola potenza dispari combinata con ***dx*** darà ***du***, mentre la restante potenza pari dev'essere riscritta in funzione dell'altra $sin^2 x + cos^2 x = 1$

▼ Esempio

$$\int cos^4 x sinx^5 x dx = \begin{bmatrix} cosx = t \\ derivata \rightarrow -sinxdx = dt \end{bmatrix}$$

$$\int cos^4 x sinx^4 sinx dx = -\int cos^4 x sinx^4 dt = -\int t^4(1-t^2)^2 dt$$

$$-\int t^4(1-2t^2+t^4)dt = -\int t^4 - 2t^6 + t^8 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + c$$

$$-\frac{cos^5 x}{5} + \frac{2cos^7 x}{7} - \frac{cos^9 x}{9} + c$$

Caso 2 - Entrambe le potenze sono dispari

In questo caso entrambe possono essere sostituite con ***u.*** Ovviamente conviene sostituire quella con la potenza più elevata

Caso 3 - Entrambe le potenze sono pari

Occorre utilizzare le seguenti formule trigonometriche - oppure integrare per parti in maniera ricorsiva.

$$Ch^2 a = cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2} \qquad Sh^2 a = sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$$

$$cos^2 x = \frac{1}{1+tan^2 x} \qquad sin^2 x = \frac{tan^2 x}{1+tan^2 x}$$

$$cos2x = cos^2 x - sin^2 x \qquad \rightarrow \qquad sin^2 x + cos^2 x = 1$$

$$sin2x = 2sinxcosx$$

Formule parametriche sostituzione

$t = tan\frac{x}{2}$ $\qquad sinx = \frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

Integrazione di funzioni razionali fratte

A(x) e B(x) sono polinomi in x

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

1. Caso → grado di A(x) ≥ grado di B(x)

- ▼ Si procede con la divisione tra polinomi.
  - ▼ Divido il termine di grado massimo di sinistra (**dividendo**) con il termine di grado massimo di destra (**divisore**), che rimane sempre lo stesso.

R(x) → resto della divisione.

Q(x) → quoziente (risultato) della divisione.

$$A(x) = B(x) * Q(x) + R(x)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\cancel{B(x)} * Q(x)}{\cancel{B(x)}} + \frac{R(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} = \int Q(x) + \int \frac{R(x)}{B(x)}$$

- ▼ Esempio

⑥ $\int \frac{x^4-3x^2+5}{x^2-2x-3}\,dx$ $\quad A(x)=x^4-3x^2+5$ $\quad \Delta<0$ $\quad \partial A \geq \partial B$

Divisione Tra polinomi

Divido il Termine di grado massimo di sinistra con il Termine di grado massimo di destra (sempre lo stesso)

$$\begin{array}{l|l} x^4+0x^3-3x^2+0x+5 & x^2-2x-3 \\ \hline -x^4+2x^3+3x^2 & x^2+2x+4 \\ /\!/\ \ 2x^3+0x^2+0x+5 & \\ \quad -2x^3+4x^2-6x & \\ \quad /\!/\ \ 4x^2-6x+5 & \\ \qquad -4x^2+8x+12 & \\ \qquad /\!/\ \ 2x+17 & \end{array}$$

$$A(x)=(x^2+2x+4)\underbrace{(x^2-2x-3)}_{B(x)}+(14x+17)$$

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} = \int x^2+2x+4\,dx + \int \frac{14x+17}{x^2-2x-3}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+x^2+4x+\int \frac{14x+17}{x^2-2x-3}\,dx$$

$B(x)=x^2-2x-3$
$\Delta>0$
$(x-3)(x+1)$

$$\frac{14x+17}{(x-3)(x+1)}=\frac{\alpha}{(x-3)}+\frac{\beta}{(x+1)} \rightarrow \alpha(x+1)+\beta(x-3)=14x+17$$

$$\alpha x+\alpha+\beta x-3\beta=14x+17$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=14\\ \alpha-3\beta=17\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\beta=-3/4\\ \alpha=17+3\left(-\frac{3}{4}\right)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\beta=-3/4\\ \alpha=\frac{59}{4}\end{cases}$$

$/\!/\ \ 4\beta=-3$

$$\frac{14x+17}{(x-3)(x+1)}=\frac{59/4}{(x-3)}+\frac{(-3/4)}{x+1}$$

$$\int\frac{14x+17}{(x-3)(x+1)}\,dx=\frac{59}{4}\int\frac{1}{(x-3)}\,dx-\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{59}{4}\ln|x-3|-\frac{3}{4}\ln|x+1|+c$$

RISULTATO: $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+\frac{59}{4}\ln|x-3|-\frac{3}{4}\ln|x+1|+c = \int\frac{x^4-3x^2+5}{x^2-2x-3}\,dx$

Integrali Notevoli

Integrali

1. $\int \frac{1}{ax+b}dx$
2. $\int \frac{1}{1+(\frac{ax+b}{c})^2}dx$
3. $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx$
4. $\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx$
5. $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx$

Primitive

1. $\frac{1}{a}ln|ax+b|+c$
2. $\frac{c}{a}arctan(\frac{ax+b}{c})+c$
3. $ln|ax^2+bx+c|+c$
4. $\frac{1}{a(1-n)}*\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}+c$
5. $\frac{1}{1-n}*\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+c$

2. Caso → grado di A(x) < grado di B(x)

Se grado di B(x) = 1

$B(x) = px + q$ allora significa che il grado di A(x) è uguale a 0 e di conseguenza costante.

$$\int \frac{c}{px+q}dx = \frac{c}{p}ln|px+q| + k$$

Se grado di B(x) = 2

Questo implica che il grado di A(x) può essere uguale a 0 oppure $A(x) = px + q$

$B(x) = ax^2 + bx + c$

Bisogna calcolare il determinante $\Delta = b^2 - 4ac$

Se DELTA > 0 ci sono 2 soluzioni reali e distinte x1,x2

$B(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ → scomposizione di B(x)

$$\frac{A(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\alpha}{a(x-x_1)} + \frac{\beta}{(x-x_2)}$$

Per trovare α e β bisogna svolgere il sistema dopo aver impostato l'equazione:

$$\alpha(x - x_2) + \beta(a(x - x_1)) = A(x)$$

Risolviamo l'integrale:

$$\int \frac{\alpha}{a(x-x_1)} + \frac{\beta}{(x-x_2)}dx = \frac{\alpha}{a}ln|x - x_1| + \beta ln|x - x_2| + c$$

▼ Esempio

Esercizi: (1) $\int \frac{1+2x}{2x^2+x-3}dx$ $\quad B(x) = 2x^2+x-3$ $\quad \Delta = 1+24 = 25 > 0$

$B(x) = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix}$

$(2x+3)(x-1)$

$\int \frac{1+2x}{(2x+3)(x-1)}dx$

$\frac{1+2x}{(2x+3)(x-1)} = \frac{\alpha}{(2x+3)} + \frac{\beta}{(x-1)} = \frac{\alpha(x-1)+\beta(2x+3)}{(2x+3)(x-1)}$

$\alpha x - \alpha + 2\beta x + 3\beta = 1+2x$ $\quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 \\ 3\beta - \alpha = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - 2\beta \\ 3\beta - 2 + 2\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 4/5 \\ \beta = 3/5 \end{cases}$

$\frac{1+2x}{(2x+3)(x-1)} = \frac{4/5}{(2x+3)} + \frac{3/5}{(x-1)}$

$\int \frac{4/5}{2x+3}dx + \int \frac{3/5}{x-1}dx = \frac{2}{5}\int \frac{2}{2x+3}dx + \frac{3}{5}\ln|x-1| + c$

$\frac{2}{5}\ln|2x+3| + \frac{3}{5}\ln|x-1| + c$

Se DELTA = 0 ci sono 2 soluzioni reali e coincidenti x1 = x2

Scomponiamo il **denominatore** B(x) → $B(x) = a(x - x_1)^2$

Se A(x) = k → è una costante:

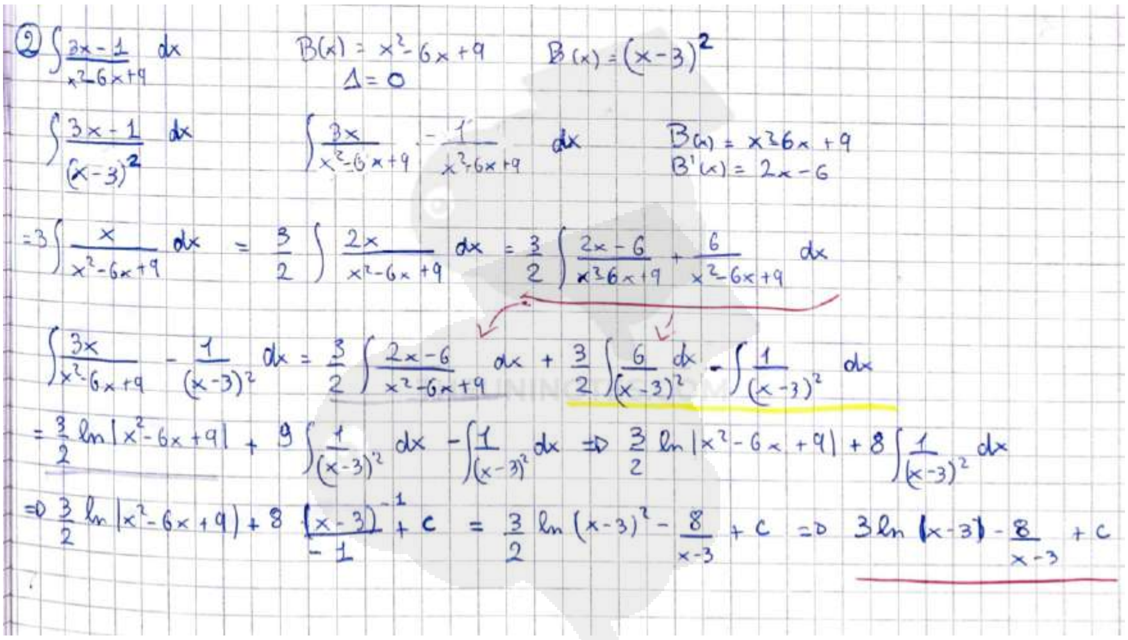
$$A(x) = k \rightarrow \int \frac{k}{a(x-x_1)^2}dx = \frac{k}{a}\int (x-x_1)^{-2}dx = \frac{k}{a}\frac{(x-x_1)^{-1}}{-1} + c$$

Se A(x) = px + q:

$$A(x) = px + q \rightarrow \int \frac{px}{a(x-x_1)^2}dx + \int \frac{q}{a(x-x_1)^2}dx$$

px → Il numeratore deve corrispondere alla derivata del denominatore $B(x)$

▼ Esempio



② $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+9}dx$ $B(x) = x^2-6x+9$ $\Delta = 0$ $B(x) = (x-3)^2$

$\int \frac{3x-1}{(x-3)^2}dx$ $\int \frac{3x}{x^2-6x+9} - \frac{1}{x^2-6x+9}dx$ $B(x) = x^2-6x+9$ $B'(x) = 2x-6$

$= 3\int \frac{x}{x^2-6x+9}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2-6x+9}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+9} + \frac{6}{x^2-6x+9}dx$

$\int \frac{3x}{x^2-6x+9} - \frac{1}{(x-3)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+9}dx + \frac{3}{2}\int \frac{6}{(x-3)^2}dx - \int \frac{1}{(x-3)^2}dx$

$= \frac{3}{2}\ln|x^2-6x+9| + 9\int \frac{1}{(x-3)^2}dx - \int \frac{1}{(x-3)^2}dx \Rightarrow \frac{3}{2}\ln|x^2-6x+9| + 8\int \frac{1}{(x-3)^2}dx$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\ln|x^2-6x+9| + 8\frac{(x-3)^{-1}}{-1} + c = \frac{3}{2}\ln(x-3)^2 - \frac{8}{x-3} + c \Rightarrow 3\ln|x-3| - \frac{8}{x-3} + c$

Se DELTA < 0 non ci sono soluzioni reali

Metodo 1. Facciamo in modo che il numeratore *px* sia uguale alla derivata di *B(x)* e poi risolviamo l'integrale.

Metodo 2. Scomponiamo il **denominatore** B(x) → $B(x) = 1 + (sx+t)^2$

Se A(x) = k → è una costante:

$$\int \frac{k}{1+(sx+t)^2}dx = \frac{k}{s}\int \frac{s}{1+(sx+t)^2}dx = \frac{k}{s}arctg(sx+t) + c$$

Se A(x) = px + q:

$$A(x) = px + q \rightarrow \int \frac{px}{1+(sx+t)^2}dx + \int \frac{q}{1+(sx+t)^2}dx$$

px → Il numeratore deve corrispondere alla derivata del denominatore $B(x)$

▼ Esempio

③ $\int \frac{2x-1}{4x^2+1}\,dx$ $\quad B(x)=4x^2+1$ $\quad \Delta<0$ $\quad B(x)=1+(2x)^2$

moltiplico per 4 in modo da avere $B'(x)=8x$

$$\frac{1}{4}\int \frac{8x-4}{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{8x}{4x^2+1}-\frac{4}{4x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{8x}{4x^2+1}\,dx-\left(\frac{1}{4}\cdot 4\right)\int\frac{1}{4x^2+1}\,dx$$

$$\frac{1}{4}\ln(4x^2+1)-\int\frac{1}{1+(2x)^2}\,dx$$

$f(x)=2x$
$f'(x)=2$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2}{1+(2x)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x$$

$$\frac{1}{4}\ln(4x^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$$

Integrazione di funzioni irrazionali per sostituzione

1. Le funzioni irrazionali della forma:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

con *ad - bc ≠ 0* (se *ad-bc = 0* l'espressione si riduce ad una costante), si **razionalizzano** mediante la sostituzione:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$$

Osserviamo che le funzioni razionali del tipo

$$\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Si razionalizzano ponendo *n = m.c.m* $\{n_1, n_2, n_p\}$

$$\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}=\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{\frac{n}{n_1}}$$

2. Analogamente, le funzioni del tipo

$$\sqrt[n]{ax+b},\ \sqrt[n_p]{ax+b},\ \sqrt[n]{x},\ \sqrt[n_p]{x}$$

$$x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n},\quad dx=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$$

da cui:

$$\int \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}dx = \int \frac{dt^n - b}{a-ct^n}\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt =$$

▼ Esempio

$$\int \frac{2x}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$$

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$$

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$\int \frac{2x}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{2\frac{1+t^2}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}+1}t\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$4\int \frac{t^4+t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

Effettuando la divisione tra polinomi:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t^2)^2} = 1 + \frac{3t^2-1}{(1-t^2)^2} \rightarrow 4\int 1 + \frac{3t^2-1}{(1-t^2)^2}dt$$

$$4t + 4\int \frac{3t^2-1}{(1-t^2)^2}dt$$

$$\frac{3t^2-1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}$$

$$A = 1, B = \frac{1}{2}, C = -1, D = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{2x}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 4t + 4ln|t-1| - \frac{2}{t-1} - 4ln|t+1| - \frac{2}{t+1} + c$$

$$4\frac{t^3-2t}{t^2-1} + 4ln|\frac{t-1}{t+1}| + c$$

$$2(x+3)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 4ln|\sqrt{x^2-1} - x| + c$$

3. Integrali di funzioni irrazionali della forma

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

Con $b^2 - 4ac \neq 0$. Distinguiamo il caso a > 0 dal caso a < 0.

Se a > 0 la funzione $\sqrt{ax^2+bx+c}$ è definita su tutto $\Re$ se $b^2 - 4ac < 0$, mentre è definita per valori esterni all'intervallo delle radici del polinomio ax^2+bx+c se $b^2 - 4ac > 0$.

Se a < 0 la funzione $\sqrt{ax^2+bx+c}$ è definita solo se $b^2-4ac>0$ ed ha per dominio l'intervallo $[x_1, x_2]$ dove x_1e x_2 sono le radici di ax^2+bx+c

3.1 a > 0

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}(x+t)$$

Oppure:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$$

Oppure se c > 0

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}-tx$$

- Esempio

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$$

$$\sqrt{x^2-2}=t-x\rightarrow t=\sqrt{x^2-2}+x$$

$$(t-x)^2=x^2-2\rightarrow t^2-2tx+x^2=x^2-2\rightarrow x=\frac{t^2+2}{2t}$$

$$x=\frac{t^2+2}{2t},\quad dx=\frac{t^2-2}{2t^2}$$

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=\int\frac{2}{t^2-2t+2}dt$$

$$t^2-2t+2=(t^2-2t+1)+1=(t-1)^2+1$$

$$\int\frac{2}{(t^2-2t+2)}=2arctg(t-1)+c=2arctg(\sqrt{x^2-2}+x-1)+c$$

(A) Se $b^2-4ac>0$ e dunque $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, dove x_1 e x_2 sono le radici di ax^2+bx+c, si ottiene:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{a}|x-x_1|\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}$$

dove il segno di $x-x_1$ dipende dall'insieme di definizione della funzione:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\rightarrow\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}=t$$

- Esempio 1.1

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{(x-1)(x-2)} = |x-1|\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} = \int \frac{dx}{(x-1)|x-1|\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)|x-1|}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx$$

Se x < 1:

$$-\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx$$

Se x > 2:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx$$

In entrambi i casi si pone $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = t$

(B) Se $b^2-4ac<0$ e la funzione razionale *f* è "semplice" nella variabile x a volte ci si può ricondurre, dopo aver completato il quadrato nelo polinomio radicando, ad un integrale risolvibile mediante una sostituzione trigonometrica inversa della tangente:

▼ Esempio 1.2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$x^2-2x+5 = (x^2+2x+1)+4 = (x+1)^2+4$$

Posto $t = x+1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}$$

e quindi, posto $t = 2tg\theta \rightarrow dt = 2sec^2\theta d\theta$ e $\sqrt{t^2+4} = 2sin\theta$

risulta:

$$\int \frac{2sec^2\theta}{2sec\theta}d\theta = \int sec\theta d\theta = ln|sec\theta + tg\theta| + c$$

$$ln|\frac{\sqrt{t^2+4}}{2} + \frac{t}{2}| + c = ln|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2} + \frac{x+1}{2}| + c + c = ln|\sqrt{x^2+2x+5}+x+1| + c$$

3.2 a < 0

La funzione $\sqrt{ax^2+bx+c}$ esiste solo se è $b^2-4ac>0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{-a}|x-x_1|\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}$$

La funzione si può razionalizzare ponendo: $\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}=t$

▼ Esempio 2.1

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

La funzione $\sqrt{1-x^2}$ è definita per $x \in [-1;1]$, inoltre essendo

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{-(x-1)(x+1)}=\sqrt{(1-x)(x+1)}=|1-x|\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

Posto $t=\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$si ottiene

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$$

e quindi per $|1-x|=1-x$ per ogni $x \in [-1;1]$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{1}{(1+x^2)(1-x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=-\int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

Da cui essendo $1+t^4=(t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

Si ottiene $A=0, B=\frac{1}{2}, C=0, D=\frac{1}{2}$

Risultato:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}arctan(\sqrt{\frac{2(x+1)}{1-x}}+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}arctan(\sqrt{\frac{2(x+1)}{1-x}}-1)+c$$

Osserviamo che spesso, quando la funzione f è "semplice" nella variabile x, è conveniente completare il quadrato sotto radice e ricondursi ad un integrale elementare o ad un integrale risolvibile mediante una sostituzione trigonometrica inversa del seno.

▼ Esempio 2.2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$$

Completando il quadrato sotto radice si ottiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}arcsin(\frac{4x-3}{5})+c$$

Osservazione

Gli integrali della forma

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Si calcolano più facilmente tenendo conto del fatto che mediante semplici passaggi algebrici ci si può ricondurre al calcolo della seguente somma di integrali:

$$K\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + L\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Con **K** e **L** costanti.

▼ Esempio

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = -\int \frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = ...$$

Integrali Binomi

Dati $\alpha, \beta, \gamma \in Q$, l'integrale

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}dx$$

Si può risolvere con uno dei tre casi:

1. $\gamma \in Z-$ se $\gamma > 0$ l'integrale è immediato, se $\gamma < 0$ è sufficiente porre $x = t^m$, ove *m* è il minimo comune multiplo tra i denominatori di α e di β;
2. $\frac{\alpha+1}{\beta} \in Z-$ si pone $a + bx^{\beta} = t^m$, ove *m* è il denominatore di γ;
3. $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma \in Z-$ si pone $ax^{-\beta} + b = t^m$, ove *m* è il denominatore di γ;

Integrali abelliani

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

Dove **R** è una funzione razionale; vi sono tre casi:

1. $a > 0-$si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$
2. $c > 0-$si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$
3. $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0-$ dette x_1e x_2 le radici del radicando (cioè le soluzioni di $ax^2+bx+c = 0$), si pone $ax^2+bx+c = (x-x_1)^2t^2$, ovvero $a(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2t^2$

Integrali impropri limitati

Caso 1:

Se l'intervallo $(a; b]$ è limitato, o la funzione è limitata, si parla di integrali impropri.

Caso 1.1:

$f \quad continua \quad (a;b] \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad$ a è un asintoto verticale

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

1. $\exists$ finito $\to \int_a^b f(x) \to$ converge
2. $\exists \quad \infty \to \int_a^b f(x) \to$ diverge
3. $\nexists \to \int_a^b f(x) \to$ indeterminato

Caso 2.1:

$f \quad continua \quad (a;b] \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

Si spezza l'integrale prendendo un punto c nell'intervallo

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{c}^{b-\epsilon} f(x)dx$$

Tenere a mente

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Se: $\alpha \geq 1$ diverge

Se: $\alpha < 1$ converge → $\frac{1}{\alpha - 1}$

Stabilire se converge:

Criterio del confronto

$f,g \quad continue \quad (a;b] \qquad e \quad f,g \to_{x\to a} +\infty \qquad 0 \leq f(x) \leq g(x)$

(vanno all'infinito con due velocità diverse)

$$\int_a^b g \quad converge \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \quad convergerà$$

$$\int_a^b f \quad diverge \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g \quad divergerà$$

Criterio del confronto asintotico

$f,g \quad continue \quad (a;b] \qquad e \quad f,g > 0 \quad f,g \to_{x\to a^+} +\infty \qquad f(x) \sim^{x\to a^+} g(x)$

$$\int_a^b f \quad converge \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b g \quad converge$$

f cambia segno ripetutamente

$f \quad continua \quad (a;b] \qquad f \quad$ cambia segno per $x \to a^+$

$$\int_a^b |f(x)| \quad converge \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \quad converge$$

NON VICEVERSA.

Integrali impropri illimitati

Caso 2.1:

$f \quad continua \in [a; +\infty) \quad e \quad limitata$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)dx$$

1. $\exists$ finito $\to \int_a^{+\infty} f(x) \to$ converge
2. $\exists \quad \infty \to \int_a^{+\infty} f(x) \to$ diverge
3. $\nexists \to \int_a^{+\infty} f(x) \to$ indeterminato

$f \quad continua \in (-\infty; b]$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^b f(x)dx$$

Caso 2.2:

$f \quad continua \quad (-\infty; +\infty) \qquad \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

Si spezza l'integrale prendendo un punto c nell'intervallo

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^c f(x)dx + \lim_{R \to +\infty} \int_c^R f(x)dx$$

Se entrambi gli integrali esistono e sono finiti separatamente, allora l'integrale converge

---

Tenere a mente

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} = \lim_{R \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$$

Se: $\beta > 1$ converge

Se: $\beta \leq 1$ diverge → $\frac{1}{\beta - 1}$

Stabilire se converge:

Criterio del confronto

$f, g \quad continue \quad [a; +\infty) \qquad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a; +\infty)$

(vanno all'infinito con due velocità diverse)

$$\int_a^{+\infty} g \quad converge \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f \quad converger\grave{a}$$

$$\int_a^{+\infty} f \quad diverge \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} g \quad diverger\grave{a}$$

Criterio del confronto asintotico

$f, g \quad continue \quad [a; +\infty) \qquad e \quad f, g > 0 \quad f(x) \sim^{x \to +\infty} g(x)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad converge \quad \iff \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad converge$$

Se f(x) non è sempre positiva (oscilla)

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \quad converge \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad converge$$

- Esempio

  La funzione $cosx$ per $x \to +\infty$ oscilla (non è né definitivamente positiva né definitivamente negativa).

$$\int_a^{+\infty} \frac{cosx}{x^2} \Rightarrow \int_a^{+\infty} |\frac{cosx}{x^2}|$$

$$|\frac{cosx}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$$

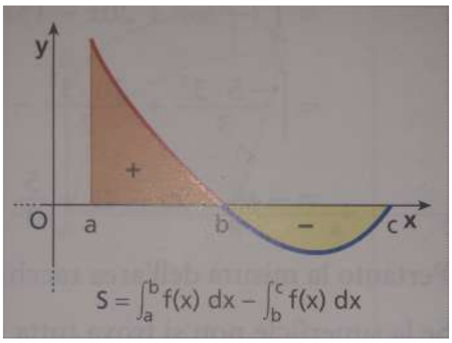
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} \Rightarrow \beta = 2 \to \beta > 1 \to converge$$

  Per il criterio del confronto quindi, converge anche $\frac{cosx}{x^2}$

Area delle superfici piane

La funzione è in parte negativa

Per calcolare l'area di figure che stanno in parte sopra l'asse x e in parte sotto, occorre scomporre le aree e calcolare gli integrali negli intervalli dove la funzione ha segno costante (positivo o negativo), tenendo presente che l'integrale di una funzione negativa va preceduto dal segno meno.



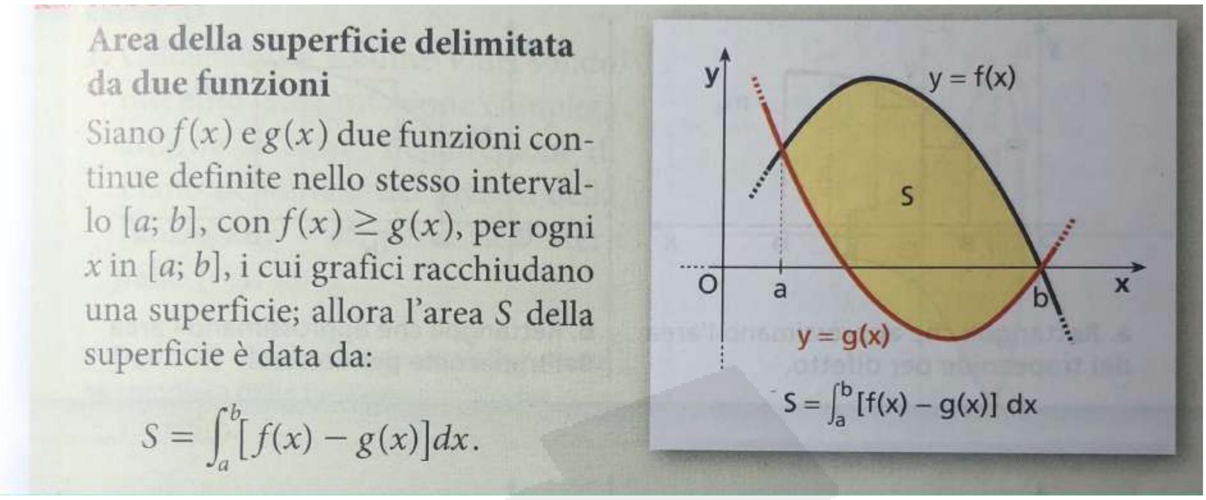
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

▼ Esempio

$y = x^3 \in [-1; 1]$

$$Area = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} = -(-\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Due funzioni delimitano una superficie chiusa

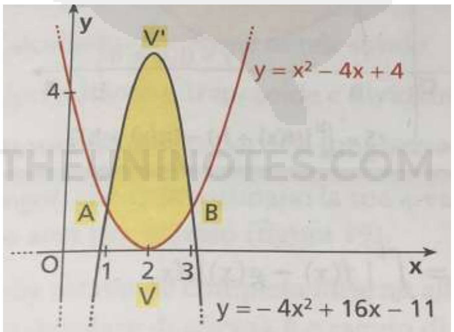

Area della superficie delimitata da due funzioni

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue definite nello stesso intervallo $[a; b]$, con $f(x) \geq g(x)$, per ogni x in $[a; b]$, i cui grafici racchiudano una superficie; allora l'area S della superficie è data da:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

▼ Esempio



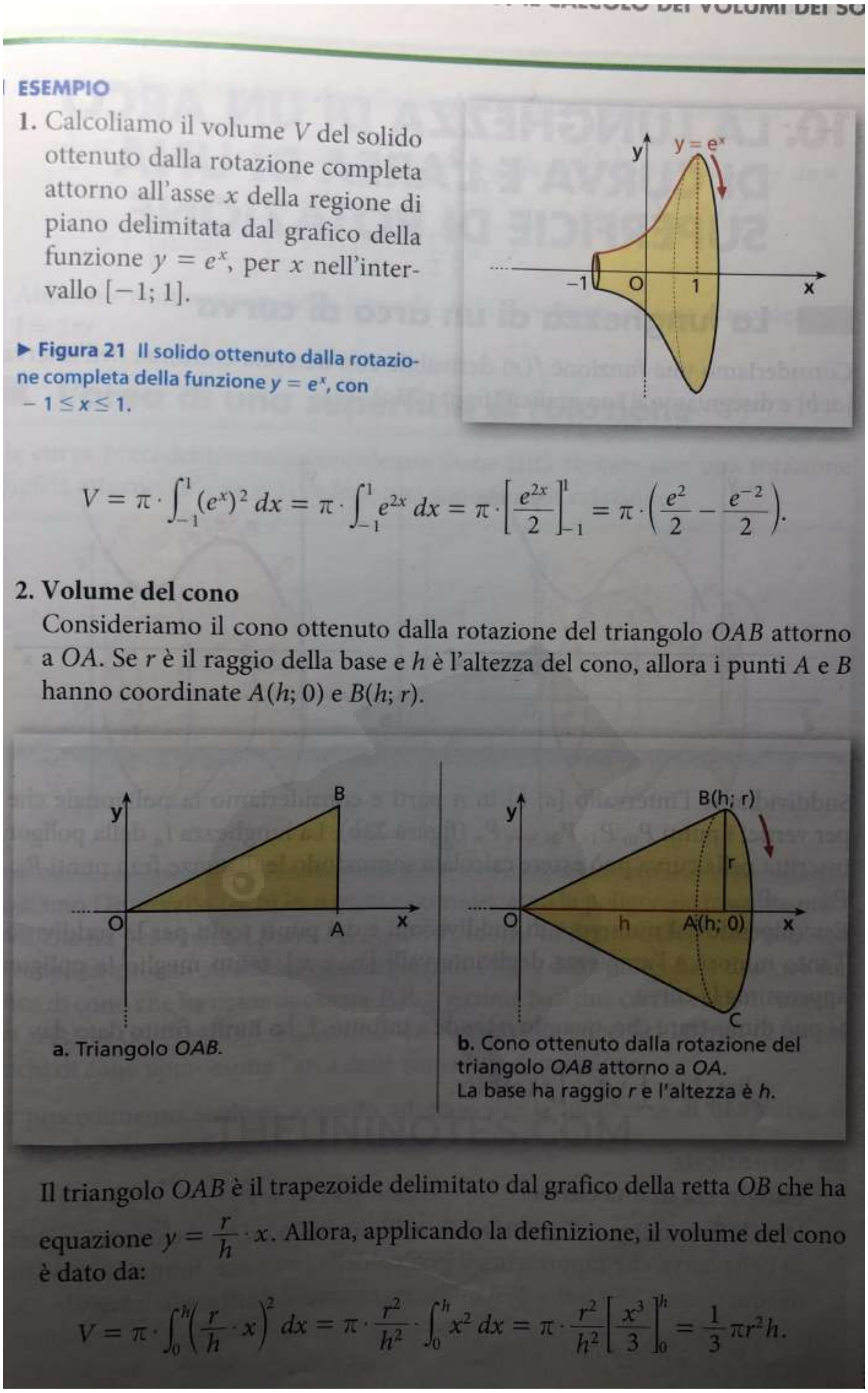
$$S = \int_1^3 (-4x^2 + 16x - 11)dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 4)dx$$

Calcolo dei volumi dei solidi di rotazione

Dato il trapezoide ABCD esteso all'intervallo [a;b], delimitato dal grafico della funzione $y = f(x)$ (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette x = a, x = b, si chiama **volume del solido,** *che si ottiene rotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo*, il numero espresso da:

$$V = \pi * \int_a^b f^2(x)dx$$

▼ Esempio



ESEMPIO

1. Calcoliamo il volume V del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $y = e^x$, per x nell'intervallo $[-1; 1]$.

▶ **Figura 21** Il solido ottenuto dalla rotazione completa della funzione $y = e^x$, con $-1 \le x \le 1$.

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^x)^2\, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} e^{2x}\, dx = \pi \cdot \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} = \pi \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right).$$

2. **Volume del cono**

Consideriamo il cono ottenuto dalla rotazione del triangolo OAB attorno a OA. Se r è il raggio della base e h è l'altezza del cono, allora i punti A e B hanno coordinate $A(h; 0)$ e $B(h; r)$.

a. Triangolo OAB.

b. Cono ottenuto dalla rotazione del triangolo OAB attorno a OA. La base ha raggio r e l'altezza è h.

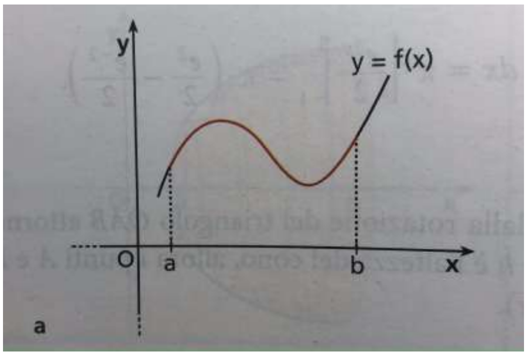
Il triangolo OAB è il trapezoide delimitato dal grafico della retta OB che ha equazione $y = \frac{r}{h} \cdot x$. Allora, applicando la definizione, il volume del cono è dato da:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2\, dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

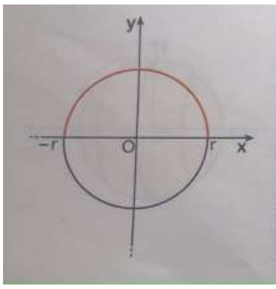
Lunghezza di un arco di curva e l'area di una superficie di rotazione

Data la funzione $y = f(x)$, derivabile nell'intervallo [a;b], si chiama **lunghezza della curva,** che rappresenta il grafico della funzione, limitata dalle rette di equazione x = a, x = b, il numero espresso da:

$$l = \int_a^b 1 + [f'(x)]^2 dx$$



▼ Esempio



ESEMPIO
Calcoliamo la lunghezza l della circonferenza di raggio r.
Poiché la circonferenza centrata nell'origine di raggio r ha equazione $x^2 + y^2 = r^2$, la semicirconferenza i cui punti hanno ordinata positiva corrisponde al grafico della funzione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ nell'intervallo $[-r; r]$.
Tale funzione ha derivata:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Allora, applicando la formula della lunghezza di una curva, otteniamo:

$$\frac{l}{2} = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \int_{-r}^{r} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}\, dx =$$

$$= r \cdot \left[\text{arcsen} \frac{x}{r}\right]_{-r}^{r} = r \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \pi r.$$

Abbiamo riottenuto la nota formula della lunghezza di una circonferenza $l = 2\pi r$.

L'area di una superficie di rotazione

Se la curva precedentemente considerata viene fatta ruotare con una rotazione completa attorno all'asse x, si ottiene una superficie di rotazione.

Data la funzione $y = f(x)$, derivabile nell'intervallo [a;b], si chiama **area della superficie,** che si ottiene ruotando in una rotazione completa il grafico della funzione, limitato dalle rette di equazione x = a, x = b, il numero espresso da:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) * \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

▼ Esempio

Calcoliamo l'area della superficie della sfera di raggio r, ottenuta dalla rotazione completa della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ attorno all'asse x.

Calcoliamo l'area della superficie sferica utilizzando la definizione:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} \, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r \, dx =$$

$$= 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r [x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2.$$