03/12/2020

giovedì 3 dicembre 2020 08:23

CORREZIONE:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x^\gamma \sqrt[3]{x^2+8}}\,dx = \int_0^c \dots + \int_c^{+\infty}$$

$$x \to +\infty \quad \frac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x^\gamma \sqrt[3]{x^2+8}} \sim \frac{1}{x^{\gamma+\frac{2}{3}}}$$

$$\gamma + \frac{2}{3} > 1 \qquad \gamma > \frac{1}{3}$$

$$x \to 0^+ \quad \frac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x^\gamma \cdot \sqrt[3]{x^2+8}} \sim \frac{\sqrt{x}}{2x^\gamma} = \frac{1}{2x^{\gamma-\frac{1}{2}}}$$

$$\gamma - \frac{1}{2} < 1 \qquad \gamma < \frac{3}{2}$$

l'integrale converge se $\frac{1}{3} < \gamma < \frac{3}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x^\gamma \, dx$$

$$\gamma > 0 \quad x \to \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{tg} x \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\gamma} \qquad \gamma < 1$$

$$\gamma < 0 \quad x \to 0^+ \quad \operatorname{tg} x \sim x^\gamma = \frac{1}{x^{-\gamma}} \qquad -\gamma < 1 \quad \gamma > -1$$

l'integrale converge se $-1 < \gamma < 1$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ CONVERGE} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\downarrow$

non si può stabilire una relazione

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \\ \bullet \ \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Se $f(x)$ non è sempre positiva

se $\int^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

se $f(x)$ non è sempre positiva
se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge
NON VALE ANCHE PER LA DIVERGENZA

es. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ CONVERGE

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$$

$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ si può dimostrare che diverge

$\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ $\quad\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ DIVERGE

$\Rightarrow$ non sappiamo dire nulla

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\cos x}{x}\, dx$$

$$\int_1^R \underbrace{\frac{1}{x}}_{F} \underbrace{\cos x}_{g}\, dx = \left[\frac{1}{x}\sin x\right]_1^R - \int_1^R -\frac{1}{x^2}\sin x\, dx$$

$$\lim_{R\to+\infty} \left[\frac{\sin R}{R} - \sin 1 + \int_1^R \frac{\sin x}{x^2}\, dx\right] =$$

$$= -\sin 1 + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx}_{\text{CONVERGE}}$$

il lim esiste finito
$\Rightarrow$ l'integrale converge

f integrabile in senso proprio o improprio su un intervallo $I \in \mathbb{R}$

preso $x_0 \in I$, si dice funzione integrale di f in I

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

TEOREMA fondamentale del calcolo integrale parte 2

- se f e F sono fatte come nella definizione

$\Rightarrow$ ① F è continua in I

② se f è continua in I

$\Rightarrow F$ è derivabile e
$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

DIM

TESI ①

Se f è integrabile $\Rightarrow F$ è continua

1a) se f è integrabile in senso proprio

$\Rightarrow |f(x)| \leq M$

per dimostrare la continuità

$\forall x \lim_{h \to 0} F(x+h) - F(x) = 0$?

si prende $\bar{x}$

$$\forall \bar{x} \in I \quad |F(x+h) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^{\bar{x}+h} f - \int_0^{\bar{x}} f \right| =$$

$$= \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} |f|\,dt \right| \leq \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} M\,dt \right| =$$

$$= M|h| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

1b) se f è integrabile in senso improprio

$f \to \pm\infty \quad x \to \bar{x}$

posto $b > \bar{x}$

$$\int_{\bar{x}}^{b} f\,dt = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f\,dt + \underbrace{\int_{\bar{x}+h}^{b} f(t)\,dt}_{\xrightarrow{h \to 0^+} \int_{\bar{x}}^{b} f}$$

$$\Rightarrow \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt \to 0$$

TESI ②

se f è continua $\Rightarrow F$ è derivabile, $\forall \bar{x} \in I$

$F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$

f continua e $h > 0$

$$F(\bar{x}+h) - F(\bar{x}) \quad \ldots \left[\int^{\bar{x}+h} - \int^{\bar{x}} \right] =$$

f continua e $h>0$

$$\frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{\bar{x}+h} - \int_{x_0}^{\bar{x}}\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} \underbrace{f(t)}_{\text{continua}}\,dt = f(c_h)$$

APPLICO TEOREMA della MEDIA

$$\exists c_h \in [\bar{x};\bar{x}+h] : \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt = f(c_h)$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to 0^+} f(c_n) = \quad \bar{x} \le c_n \le \bar{x}+h$$

$$= f(\bar{x})$$

STUDIO di funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{e^{-t}}{1+t}}_{f}\,dt$$

$$D_f = (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$$

$$\int_{-1}^{a} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt \quad \text{DIVERGE}$$

$$D_F = (-1;+\infty)$$

in $x=-1$ f ha asintoto verticale e $\int_{-1}^{a} f$ diverge

$t>-1$ $f(t)>0$

se $x>0$ $F(x) = \int_0^x f > 0$

se $-1<x<0$ $F(x) = \int_0^x f = -\int_x^0 f < 0$

$F(0)=0$ $\quad f(x)>0$ per $x>0$

$f(x)<0$ per $-1<x<0$

$$\lim_{x\to -1^+} F(x) = \int_0^{-1} f = -\underbrace{\int_{-1}^{0} f}_{\text{DIVERGE}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt = \ell$$

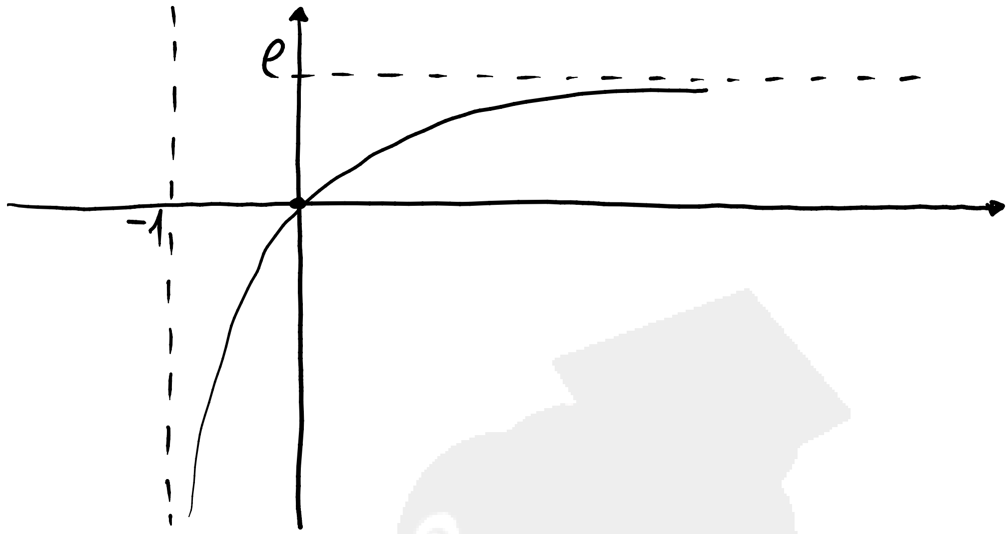
$f(t) \le e^{-t} \quad \forall t \ge 0$

$f(t) \le e^{-t} \quad \forall\, t \ge 0$

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ CONVERGE

$F'(x) = f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} > 0 \quad \forall\, x > -1$ F è crescente in D

$F''(x) = f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1) - e^{-x}}{(x+1)^2} = -\frac{e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2} < 0$



es.

$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t+1}}\,dt$

$D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

$f(t) \overset{t \to -1}{\sim} \frac{e}{(t+1)^{1/3}} \qquad \frac{1}{3} = \alpha < 1$

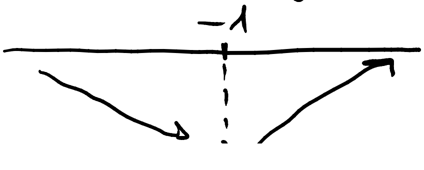
$\Rightarrow$ integrale improprio di f in -1 CONVERGE

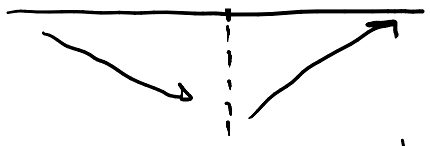
$D_F = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t+1}}}_{\text{CONVERGE}} = \ell$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \int_0^{-\infty} f = -\int_{-\infty}^0 f = -\left[\underbrace{\int_{-\infty}^c f}_{\text{DIVERGE}} + \underbrace{\int_c^{-1} f}_{\text{CONVERGE}} + \underbrace{\int_{-1}^0 f}_{\text{CONVERGE}}\right] = +\infty$

$F'(x) = f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x+1}}$ $\to f > 0 \quad x > -1$; $\to f > 0 \quad x < -1$





$$F''(x) = f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot\sqrt[3]{x+1} - e^{-x}\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}}{(\sqrt[3]{x+1})^2} =$$

$$= -e^{-x}\frac{3x+4}{3(\sqrt[3]{x+1})^4}$$