21/12/2020

lunedì 21 dicembre 2020 16:04

SERIE

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \ln 2 \Rightarrow$$ converge per il teorema di Leibnitz

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \quad - \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{6} \quad - \frac{1}{8} \quad + \frac{1}{10} \quad - \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots = \frac{3}{2} \ln 2$$

è un riordinamento della serie precedente

ci sono tutti i termini ma la somma risulta differente

SERIE di Taylor

Se una funzione f è continua n volte in D

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} f^{k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + o((x - x_0)^n)$$

$f \in C^{\infty}(D) \qquad x_0 \in D$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

↳ per scriverlo non basta dire che sia continua infinite volte

es. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$x \neq 0 \quad f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \to 0} 0 \qquad f'(0) = 0$

$\Rightarrow f$ è derivabile infinite volte

$\forall n \; f^{n}(0) = 0$

$\Rightarrow$ l'altra tesi è:
$\exists (x_0 - \delta ; x_0 + \delta) \qquad \left| \frac{f^{n}(x)}{n!} \right| \leq M$

$$e^{x} = \sum^{\infty} \frac{x^n}{\quad}$$ ← altra definizione di esponenziale

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ ← altra definizione di esponenziale

TUTTE LE FORMULE di TAYLOR sono una parte delle serie di Taylor

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Si chiama serie di Potenze centrata in x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

le serie di Taylor sono particolari serie di potenze

$$a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

∀ serie di potenze esiste un numero R (raggio di convergenza) per il quale si sa che la serie converge nell'intervallo $(x_0-R; x_0+R)$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R=+\infty$$

questa serie converge per ogni x reale

$$\text{Sh}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{Ch}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

per tutte queste serie $R=+\infty$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \qquad R=1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad R=1$$

le serie di potenze sono particolari serie di funzioni

$$f_n : D \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

- limiti
- derivate

· integrali

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) \\
&\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \\
&\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx
\end{aligned}\right\} \text{in generale è falso}$$

MA per le serie di potenze e per le serie di Taylor quelle proprietà valgono

$\Downarrow$

se ci si mantiene all'interno dell'intervallo di convergenza $(x_0 - R; x_0 + R)$

es. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \right\} dx =$$

$$= \sum \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 x^{2n}\, dx}_{\frac{1}{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$\forall x \in (-1; 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n =$$

$$= x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 \right) =$$

$$= x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) = x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n+1)^2} \qquad c_n = \frac{\alpha^n}{(n+1)^2}$$

Se $\alpha > 0$

Criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{\alpha^n}{(n+1)^2}} = \lim \alpha \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = \alpha$$

se $\alpha > 1$ la serie diverge

Se $\alpha = 1$ NON SO dire NULLA

Se $0 < \alpha < 1$ la serie CONVERGE

Se $\alpha = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ CONVERGE

$$\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2} \qquad 2 > 1 \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

$\alpha < 0$ $\sum \frac{\alpha^n}{(n+1)^2}$

$$\sum \left| \frac{\alpha^n}{(n+1)^2} \right| \begin{cases} 0 \le |\alpha| \le 1 & \text{CONVERGE} \\ |\alpha| > 1 & \text{DIVERGE} \end{cases}$$

Se $-1 \le \alpha \le 0$ la serie converge assolutamente e anche semplicemente

se $\alpha < -1$ la serie non converge assolutamente

Se $\alpha < -1$ $\frac{\alpha^n}{(n+1)^2} \overset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

$\sum c_n$ converge $\Rightarrow c_n \to 0$

$\sum c_n$ NON CONVERGE $\Leftarrow c_n \not\to 0$

$\sum \frac{\alpha^n}{(n+1)^2}$ CONVERGE se $-1 \le \alpha \le 1$

se $x \to 0$ $\quad 2x + o(1) = o(1)$

$\downarrow$

perché infinitesimo

$$F(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{e^{-t}}{t+1}}_{f} dt \qquad D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$$

$$D_F = (-1; +\infty)$$

f

$D_F = (-1; +\infty)$

$F(0) = 0$
$F(x) > 0 \quad$ se $x > 0$
$F(x) < 0 \quad$ se $-1 < x < 0$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt = \ell > 0$

$\lim_{x \to -1^+} F(x) = -\int_{-1}^{0} f\, dt = -\infty \qquad x = -1$ asintoto verticale

$F'(x) = f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} > 0 \quad \forall x > -1 \quad F$ crescente

$F''(x) = \frac{-e^{-x}(x+1) - e^{-x}}{(x+1)^2} = -\frac{e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x > -1$