14/12/2020

lunedì 14 dicembre 2020 16:27

serie a termini positivi

4° criterio (DELLA RADICE)

$\sum a_n \quad a_n \geq 0$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$
- $\to > 1$ la serie DIVERGE
- $\to = 1$ caso DUBBIO
- $\to < 1$ la serie CONVERGE
- $\to \nexists$ ma $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ serie CONVERGE

es.

$$\sum \underbrace{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}}_{a_n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = \frac{1}{e^3} < 1$$

la serie CONVERGE

$\sum a_n \quad a_n \to$ segno qualsiasi

Def se $\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$ esiste finito la serie CONVERGE

se $\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} |a_n|$ esiste finito la serie **converge assolutamente**

TEOREMA

se $\sum a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

$\sum |a_n|$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

assoluta $\Rightarrow$ semplice

NON VALE IL CONTRARIO

es. $\sum \frac{\sin n}{n^2} \leftarrow \sum \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$

$\downarrow$

CONVERGE

$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \left(= \frac{\pi - 1}{2}\right) \quad \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ ma non basta a dire che CONVERGE

SERIE A SEGNI ALTERNI

SERIE A SEGNI ALTERNI

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \qquad b_n > 0$$

TEOREMA di LEIBNIZ

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ b_n \to 0 \\ \bullet\ b_{n+1} < b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} - \sum (-1)^n b_n \text{ CONVERGE} \\ - \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n b_n \right| < b_{k+1} \end{array}$$

s_1 — s_3 — s_2

$b_0 - b_1$ — $b_0 - b_1 + b_2 - b_3$ — $b_0 - b_1 + b_2$ — b_0

le somme convergono a un punto che è quello della serie più termini ho e meno errore commetto

es. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$

$\downarrow$

soddisfa il teorema di Leibniz $\Rightarrow$ converge

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln 2 \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

DIVERGE

la serie converge ma non assolutamente

es. $\displaystyle\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+n}}_{a_n}$

$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^3+n} \qquad \frac{1}{n^3+n} \sim \frac{1}{n^3}$$

$$\sum \frac{1}{n^3} \text{ CONVERGE}$$

$\Rightarrow$ la serie iniziale converge assolutamente

$\Rightarrow$ converge semplicemente

determinare la somma con un errore $< 10^{-2}$

$$\underbrace{\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+n} - \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{1}{n^3+n} \right|}_{|} < 10^{-2}$$

$$| \quad | < b_{k+1} < 10^{-2}$$

$$\left| \; k\,\underbrace{b_{k+1}}_{\frac{1}{(k+1)^3+(k+1)}} < 10^{-2}\right.$$

$k=3 \quad b_{k+1} = \frac{1}{68}$

$k=4 \quad b_{k+1} = \frac{1}{130} < 10^{-2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ldots \simeq \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{1}{n^3+n} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{1}{30}+\frac{1}{68}$$

se $a_n > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n = \underbrace{a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}+\ldots}_{> a_{k+1}}$$

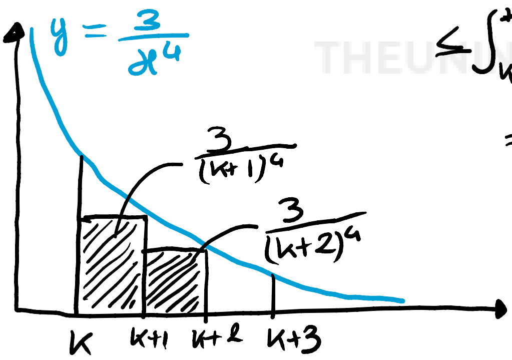
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} \qquad \text{errore} < 10^{-3}$$

$$\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} < \frac{3}{n^4} \qquad \sum \frac{3}{n^4} = 3\sum\frac{1}{n^4} \quad \text{CONVERGE}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} - \sum_{n=1}^{k} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} \right| < 10^{-3}$$

$$= \sum_{n=k+1}^{n} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} < \ldots < 10^{-3}$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{3}{n^4} = \frac{3}{(k+1)^4}+\frac{3}{(k+2)^4}+\ldots \leq$$



$$\leq \int_k^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_k^{+\infty} = \frac{1}{k^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} - \sum_{n=1}^{k} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} < \frac{1}{k^3} < 10^{-3}$$

vero se $k \geq 10$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} \simeq \sum_{n=1}^{10} \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} \quad \text{l'errore} < 10^{-3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow$ CONVERGE SEMPLICEMENTE

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE
$\Rightarrow$ CONVERGE SEMPLICEMENTE

$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE

$\sum \left| (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = \sum \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$ CONVERGE

$\sum (-1)^n \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}_{b_n}$ $\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ DIVERGE

$\downarrow$
NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE

$b_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ $\quad b_n \longrightarrow 0$

$b_{n+1} < b_n$

- per il teorema di Leibniz
converge semplicemente

$a+b+c = c+a+b$

In una serie convergente vale la proprietà commutativa?

Se la serie converge assolutamente sì
Se la serie converge semplicemente
$\hookrightarrow$ TEOREMA di RIEMANN-DINI)
Data $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, che converge semplicemente e non assolutamente

$\forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ $\exists$ riordinamento degli a_n: la serie così ordinata converga a λ

a_n segno qualsiasi

$$\underset{\geq 0}{b_n} = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases} \qquad \underset{\leq 0}{c_n} = \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ a_n & a_n < 0 \end{cases}$$

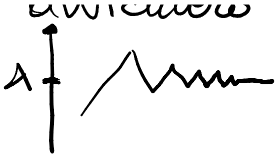
$\sum |a_n| = \underbrace{\sum b_n}_{\text{diverge}} + \underbrace{\sum -c_n}_{\text{diverge}}$ diverge

$\sum b_n = +\infty \qquad \sum c_n = -\infty$

sommando con criterio b_n e c_n mi avvicinerò sempre di più a λ

a salire b_n
a scendere c_n

avvicinandosi sempre di più a λ



a salire b_n
a scendere c_n

$\Rightarrow$ la serie converge a λ