Formulario Geometria Analitica

Indice: Vettori, Piano, Rette, Distanze

Vettori

É un segmento orientato che ha *direzione, verso* e *modulo*.

- **Direzione** → segmento su cui poggia il vettore;
- **verso** → punta del vettore
- **modulo** → lunghezza del segmento (*norma*) $||V|| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$

Versore → vettore di modulo unitario $\frac{v}{||v||}$

$\overrightarrow{P_A P_B} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}$

Prodotto di un vettore per un numero

v → vettore, $\lambda \in \Re$

λv → stessa direzione, stesso verso (oppure opposto $\lambda > 0, \lambda < 0$), lunghezza $|\lambda| * ||v||$

Esempio: se $\lambda = 3$, la direzione e il verso sono uguali, la lunghezza è 3 volte quella di v

Proprietà:

- omogeneità: $\lambda(uv) = (\lambda u)v$
- compatibilità: $||\lambda v|| = |\lambda| * ||v||$
- distributiva: $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad (\lambda + u)v = \lambda v + uv$

Somma tra due vettori

Dati v e w, $v + w$ si esegue con la regola del parallelogramma

$$v + w = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + (v_3 + w_3)$$

Proprietà:

- commutativa: $v + w = w + v$
- associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $\exists$ elemento neutro: $z : \forall v + z = v \qquad z = 0 \rightarrow v + 0 = v$
- $\exists$ opposto: $\forall v \neq 0 \qquad \exists u : v + u = u + v = 0 \Rightarrow u = -v$

Prodotto scalare:

Prodotto tra due vettori che dà come risultato un numero

$$v \,.\, w = ||v|| * ||w|| * cos\alpha$$

Proprietà:

- commutativa: $v \,.\, w = w \,.\, v$
- omogeneo: $(\lambda \,.\, v) \,.\, w = v \,.\, (\lambda \,.\, w) = \lambda \,.\, (v \,.\, w)$
- distributiva: $u \,.\, (v + w) = u \,.\, v + u \,.\, w$

- positività: $u \cdot u \geq 0$ e $u \cdot u = 0 \iff u = 0$
  - $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$

Esempio: $v \cdot w = 0 \rightarrow v \perp w \rightarrow v * w * cos90^\circ = 0$ con $v, w \neq 0$

Proprietà: $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \qquad w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

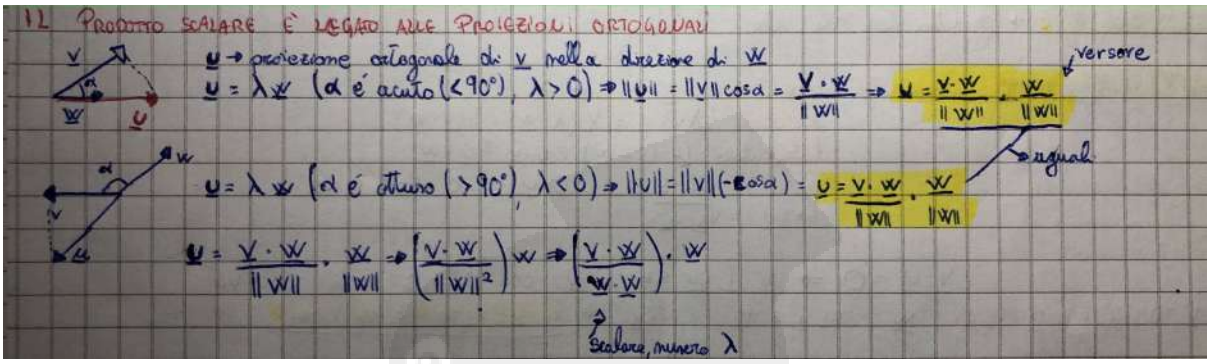
Dimostrazione

I termini sono cancellati perché i versori i, j, k sono $\perp$ tra di loro e quindi il prodotto è 0

$$v \cdot w = v_1 w_1 (i * i) + \cancel{v_1 w_2 (i * j)} + \cancel{v_1 w_3 (i * k)} + \cancel{v_2 w_1 (j * i)} + v_2 w_2 (j * j) + \cancel{v_2 w_3 (j * k)} + \cancel{v_3 w_1 (k * i)} + \cancel{v_3 w_2}$$

Vettori perpendicolari: $v \cdot w = 0$

Proiezioni ortogonali



Prodotto vettoriale

Prodotto che dà come risultato un vettore. Direzione perpendicolare a entrambi.

$$||v|| * ||w|| * sin\alpha$$

Proprietà:

- anticommutativa: $v \wedge w = -w \wedge v$
- omogeneità: $(\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w) = \lambda (v \wedge w)$
- distributiva: $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$

Se $v \wedge w = 0 \quad (v, w \neq 0) \Rightarrow v \parallel w \qquad (v = \lambda w) \rightarrow w * v * sin0 = 0$

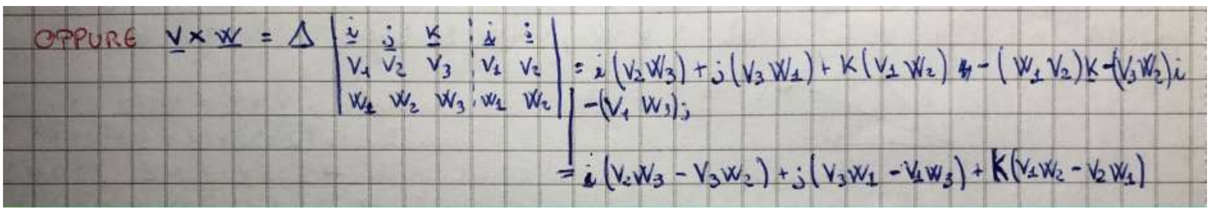
Proprietà: $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \qquad w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$

$$v \wedge w = (v_2 w_3 - v_3 w_2) i + (v_3 w_1 - v_1 w_3) j + (v_1 w_2 - v_2 w_1) k$$

Dimostrazione

$$v \wedge w = \cancel{v_1 w_1 (i * i)} + v_1 w_2 (i * j) + v_1 w_3 (i * k) + v_2 w_1 (j * i) + \cancel{v_2 w_2 (j * j)} + v_2 w_3 (j * k) + v_3 w_1 (k * i) + v_3 w_2$$

$$(v_2 w_3 - v_3 w_2) i + (v_3 w_1 - v_1 w_3) j + (v_1 w_2 - v_2 w_1) k$$



Vettori paralleli: $v \wedge w = 0$

Proprietà prodotto vettore:

$$\begin{cases} v \perp j \\ v \perp QP \end{cases} \rightarrow v = j \wedge QP$$

Prodotto misto: $u \cdot (v \wedge w)$

Si esegue sempre prima il prodotto vettoriale

Proprietà:

- ciclico: $u \cdot v \wedge w = v \cdot w \wedge u = w \cdot v \wedge u$
- $u \cdot v \wedge w = 0 \iff u, v, w$ complanari (giacciono sullo stesso piano)
- $u \cdot v \wedge w \neq 0 \iff ||u \cdot v \wedge w|| =$ volume parallelepipedo

Area della figura tra due vettori: $||v \wedge w||$

Volume della figura: $||v \wedge w \cdot u||$

Piano

Equazione Cartesiana del piano: $\beta : ax + by + cz = d$

$P(xo; yo; zo) \qquad d = ax_0 + by_0 + cz_0$

- Piano verticale: possiede un vettore perpendicolare orizzontale nella forma $ai + bj + 0k$, pertanto il generico piano verticale avrà come equazione $ax + by = d$
- Piano orizzontale: il suo vettore perpendicolare verticale, nella forma $0i + 0j + ck$, l'equazione di β è allora $cz = d$. Un qualsiasi piano orizzontale passante per un punto, ha in comune con il punto solo la coordinata z.
  - Esempio: $P(1, 2, 11)$, $\beta : z = 11$
- Piano parallelo a y: il versore del piano è perpendicolare al versore j (retta y)
- Piano passante per l'origine: la $d = 0$

Piani particolari

Piano parallelo a un asse coordinato

- $ax + by + d = 0$ è un piano parallelo all'asse z
  - $ax + by = 0$ è un piano che contiene l'asse z
- $ax + cz + d = 0$ è un piano parallelo all'asse y
  - $ax + cz = 0$ è un piano che passa per l'asse y
- $by + cz + d = 0$ è un piano parallelo all'asse y
  - $by + cz = 0$ è un piano cui appartiene l'asse x

Piano parallelo a un piano coordinato

- $cz + d = 0$ è parallelo al piano xy
  - Piano xy ha equazione cartesiana $z = 0$
- $by + d = 0$ è parallelo al piano xz
  - Piano xz ha equazione cartesiana $y = 0$
- $ax + d = 0$ è parallelo al piano yz

- Piano yz ha equazione cartesiana $x = 0$

- $z = k \parallel$ al piano xy
- $y = k \parallel$ al piano xz
- $x = k \parallel$ al piano yz

Due piani

$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad P_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

Possono essere:

- coincidenti: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$
- paralleli: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ oppure $(a + b + c) = \lambda(a + b + c)$
- incidenti: $\nexists \quad (v_1) : \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = (v_2) : \lambda \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$
    - perpendicolari: $v_1 \cdot v_2 = 0$

Piano passante per un punto, perpendicolare a un dato vettore

Equazione del piano β perpendicolare al vettore $u = 7i + 3j - 2k$ e passante per il punto A$(1; 3; -2)$

$$\beta : 7x + 3y - 2z = d$$

$$d = 7 * (1) + 3 * (3) - 2 * (-2) = 20$$

$$\beta : 7x + 3y - 2z = 20$$

Oppure imponiamo che $u \cdot AP = 0$ dove $P = (x; y; z)$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z+2 \end{bmatrix} = 7x + 3y - 2z - 20 = 0$$

Equazione cartesiana del piano con due vettori e un punto

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \qquad v = l_1i + m_1j + n_1k \qquad w = l_2i + m_2j + n_2k$$

Dato che v, w sono paralleli al piano possiamo utilizzarli per determinare le componenti di un vettore ortogonale al piano, e dunque risalire all'equazione cartesiana. La direzione ortogonale è individuata dal prodotto vettoriale tra v e w

$$v \wedge w = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

Svolgimento: anzitutto osserviamo che $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, infatti la matrice che ha per righe (o per colonne) le componenti dei due vettori ha rango massimo

$$\text{rk}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Possiamo allora risalire a un vettore ortogonale al piano calcolando il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{j}\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{k}\det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

I coefficienti a, b, c dell'equazione cartesiana del piano sono le componenti del vettore ortogonale appena calcolato, dunque possiamo iniziare a comporla

$$5x - 3y + 3z + d = 0$$

Imponiamo il passaggio per il punto $P(-2, 3, 1)$

$$5(-2) - 3(3) + 3(1) + d = 0$$

e ricaviamo il valore del parametro d risolvendo la precedente equazione

$$-10 - 9 + 3 + d = 0 \ \rightarrow \ d = 16$$

In definitiva il piano ha equazione

$$5x - 3y + 3z + 16 = 0$$

Piano passante per il punto P e Q e parallelo all'asse y

Il piano è $\|$ all'asse y e contiene il segmento $\overrightarrow{QP}$, quindi il suo vettore perpendicolare v dev'essere contemporaneamente perpendicolare all'asse y e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{QP}$, allora il vettore direzione del piano sarà $v = j \wedge QP = 6i - 3k$ (*per le proprietà del prodotto vettore*).

$$\beta : 6x - 3z = d$$

Per ricavare la d, imponiamo il passaggio per uno dei due punti.

$$\begin{gathered} P(5,7,11) \qquad Q(2,1,5) \\ d = 6 * 5 - 3 * 11 = -3 \\ \beta : 6x - 3z = -3 \end{gathered}$$

Piano passante per un punto, parallelo a un piano dato

Equazione del piano β parallelo al piano $x - 2y + 3z = 20$ e passante per il punto P$(1; 2; -5)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

$$d = 1 * 1 - 2 * 2 + 3 * (-5) = -18$$

$$\beta : x - 2y + 3z = -18$$

Piano passante per una retta e parallelo a un'altra retta

Uno degli assi è contenuto nel piano

$d = 0$

$\beta : ax + by + cz = 0$

- Contiene l'asse x: allora $a = 0$
- Contiene l'asse y: allora $b = 0$
- Contiene l'asse y: allora $c = 0$

Esempio: $x + 3z = 0$ contiene l'asse y poiché b = 0

Esempio: $P(5, 7, 11)$, β contiene l'asse x e passa per P.

$by + cz = 0 \rightarrow 7b + 11z = 0 \rightarrow b = 11, c = -7$

$$\beta : 11x - 7z = 0$$

Fasci di piani non paralleli

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + u(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$$

$\lambda, u \in \Re$ (numeri reali)

Fascio di piani contenente il punto $P(1, 2, 3)$

$$\beta_1 : x + y - z = 2 \qquad \beta_2 : 2x - y + 3z = 8$$

$$\lambda(x + y - z - 2) + u(2x - y + 3z - 8) = 0$$

$$\lambda(1 + 2 - 3 - 2) + u(2 - 2 + 9 - 8) = 0$$

$u = 2\lambda$ supponiamo che $\lambda = 1$, $u = 2$

$$(x + y - z - 2) + 2(2x - y + 3z - 8) = 0$$

$$\beta^* : 5x - y + 5z = 18$$

Fasci di piani paralleli

$$Fascio : ax + by + cz = \lambda$$

$\lambda \in \Re$

Determinare l'equazione del Fascio di piani paralleli al piano β

$\beta : 2x + 3y - z = 3$, che contiene il punto $P(1, 1, 1)$

$d = 2 * 1 + 3 * 1 - 1 * 1 = 4$

$$\beta^* : 2x + 3y - z = 4$$

Piano passante per tre punti

Esempio (equazione cartesiana di un piano per tre punti non allineati)

Calcolare l'equazione cartesiana del piano cui appartengono i punti

$$P_0(1,0,2),\ P_1(0,1,3),\ P_2(2,-1,0)$$

Svolgimento: per determinare l'equazione cartesiana del piano imponiamo la condizione

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{pmatrix}=0$$

Sostituiamo le coordinate dei punti

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0-1 & 1-0 & 3-2 \\ 2-1 & -1-0 & 0-2 \end{pmatrix}=0$$

ed effettuiamo il calcolo

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}=0$$

Calcoliamo il determinante con la regola di Laplace, e in particolare con sviluppo rispetto alla prima riga

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=(x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-y\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+(z-2)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=(x-1)(-2+1)-y(2-1)+(z-2)(1-1)=$$

$$=-2x+x+2-1-2y+y=$$

$$=-x-y+1$$

Possiamo così concludere che l'equazione cartesiana del piano che contiene i punti assegnati è

$$-x-y+1=0$$

Parametri direttori di un piano in forma cartesiana e parametrica $n=(a,b,c)$

$$ax+by+cz+d=0$$

2) Il vettore dei parametri direttori del piano

$8x - z = 0$

è

$\mathbf{n} = (8, 0, -1)$

3) $\mathbf{n} = (0, 0, -3)$ è il vettore dei coefficienti direttori del piano

$-3z + 7 = 0$

Parametri direttori di un piano in forma parametrica

Il caso ben più interessante si presenta quando dobbiamo calcolare i parametri direttori dalle equazioni parametriche di un piano

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 s + l_2 t \\ y = y_0 + m_1 s + m_2 t \\ z = z_0 + n_1 s + n_2 t \end{cases}$$

dove s e t sono due parametri reali liberi, (x_0, y_0, z_0) sono le coordinate cartesiane di un punto del piano, e $\mathbf{v} := (l_1, m_1, n_1),\ \mathbf{w} := (l_2, m_2, n_2)$ sono due vettori linearmente indipendenti che esprimono due direzioni parallele al piano, e le cui componenti sono riferite alla base che definisce il sistema di riferimento.

In tal caso possiamo passare dalle equazioni parametriche all'equazione cartesiana del piano, oppure, procedere con un metodo più elegante, ma che può essere usato solo se siamo in un sistema di riferimento ortonormale.

Ricordando che il prodotto vettoriale tra due vettori linearmente indipendenti è, per definizione, ortogonale ai due vettori di cui si calcola il prodotto, il vettore dei parametri direttori di un piano in forma parametrica si ottiene dal prodotto vettoriale tra i vettori di giacitura $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ che definiscono le equazioni parametriche del piano, ossia

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

Rette nello spazio

Rette perpendicolari: $v_1 \cdot v_2 = 0$

Rette parallele: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Equazione parametrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$P(x_0, y_0, z_0)$, $v = ai + bj + ck$

$xi + yj + zk = (x_0 + at)i + (y_0 + bt)j + (z_0 + ct)k$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Equazione generale

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Equazione cartesiana

Per individuare una retta r nello spazio sono sufficienti due punti distinti $P_0, P_1 \in r$ oppure, equivalentemente, un punto di passaggio e un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ parallelo a r, che ne definisce la direzione.

Sottolineiamo che le due situazioni sono equivalenti perché, come ben saprete, due punti distinti P_0, P_1 appartenenti a una retta ne individuano automaticamente la direzione

$$\overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0$$

e possiamo considerare come punto di passaggio, indifferentemente, P_0 oppure P_1.

$$v = li + mj + nk$$

Caso 1) Le componenti del vettore direzione sono tutte non nulle.

Se le componenti (l, m, n) del vettore $\mathbf{v}$ sono tutte e tre non nulle

$$l \neq 0, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

allora possiamo scrivere le equazioni cartesiane della retta r per mezzo della formula

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Attenzione perché, pur sembrando un'unica equazione, quella appena scritta è una forma compatta per indicarne due:

$$r: \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} \\[2ex] \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

Caso 2) Una componente del vettore direzione è nulla

2a) nel caso in cui

$$l = 0,\ m \neq 0,\ n \neq 0$$

le equazioni cartesiane della retta sono

$$r:\ \begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

2b) Se invece

$$l \neq 0,\ m = 0,\ n \neq 0$$

allora

$$r:\ \begin{cases} y = y_0 \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

2c) Infine, se

$$l \neq 0,\ m \neq 0,\ n = 0$$

allora

$$r:\ \begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} \end{cases}$$

Caso 3) Due delle tre componenti del vettore direzione sono nulle.

In ultima analisi, se due delle componenti di $\mathbf{v}$ sono nulle, si distinguono i seguenti sottocasi:

3a) se

$$l = m = 0, \ n \neq 0$$

le equazioni cartesiane di r sono

$$r : \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

3b) Se

$$l = n = 0, \ m \neq 0$$

la rappresentazione cartesiana di r è

$$r : \begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

3c) Se

$$m = n = 0, \ l \neq 0$$

allora

$$r : \begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Da cartesiano a parametrica

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Poniamo una variabile qualsiasi = t

$$x = t \rightarrow \begin{cases} z = t + 3y - 2 \\ y = 1 - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

Da parametrica a cartesiana

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$$

Svolgimento: tutte e tre le equazioni del sistema contengono il parametro, dunque scegliamone una da cui ricavare il valore di t.

In termini di calcoli è consigliabile considerare la seconda equazione, in cui il coefficiente di t è 1.

$$y = -1 + t$$

$$t = y + 1$$

Procediamo considerando il sistema formato dalle restanti equazioni

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$$

e in ciascuna di esse sostituiamo t con $y + 1$

$$\begin{cases} x = 2 - 3(y + 1) \\ z = 5 + 5(y + 1) \end{cases}$$

Svolgiamo i prodotti, portiamo tutto a primo membro e sommiamo i termini simili

$$\begin{cases} x = 2 - 3y - 3 \\ z = 5 + 5y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ -5y + z - 10 = 0 \end{cases}$$

Due rette

$$A = \begin{pmatrix} x_r - x_s & y_r - y_s & z_r - z_s \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}$$

Gli elementi della prima riga sono dati dalla differenza delle coordinate dei due punti P_r, P_s. Le successive righe sono formate dalle componenti dei vettori direttori delle rette r, s, rispetto alla base che definisce il sistema di riferimento.

3a) Se il determinante della matrice A è diverso da zero, allora le due rette sono sghembe, infatti i tre vettori $P_s - P_r, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s$ sono linearmente indipendenti. Ci fermiamo qui.

3b) Se il determinante di A è uguale a zero, abbiamo a che fare con rette complanari in quanto $P_s - P_r, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s$ formano un insieme di vettori linearmente dipendenti tra loro. Proseguiamo nello studio.

4) Consideriamo la matrice le cui righe sono costituite dai coefficienti direttori delle rette r, s

$$B = \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}$$

4a) Se il rango della matrice B è 2, le due rette sono incidenti. Se richiesto, si possono calcolare le coordinate del loro punto di intersezione.

4b) Se il rango di B è 1, le due rette sono parallele. In particolare:

- se il punto $P_r \in r$ appartiene alla retta s o, viceversa, se il punto $P_s \in s$ appartiene alla retta r, allora le due rette sono parallele coincidenti;

- se invece il punto $P_r \in r$ non appartiene alla retta s, oppure il punto $P_s \in s$ non appartiene a r, allora le due rette sono parallele distinte.

- coincidenti: $v_1 = \lambda v_2 \rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}$ è $\parallel$ a v_1 o a v_2
- parallele: $v_1 \parallel v_2$ → $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
- incidenti: non essendo parallele, hanno un punto in comune

e risolvere il sistema lineare composto dalle equazioni che cartesiane che definiscono le due rette

$$\begin{cases} 3x - z - 20 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ x + 3z - 10 = 0 \\ y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

Sappiamo a priori che il sistema ammette un'unica soluzione: calcoliamola col metodo di sostituzione. Ricaviamo y dalla seconda equazione e sostituiamone l'espressione nelle altre

$$\begin{cases} y = 4 \\ 3x - z - 20 = 0 \\ x + 3z - 10 = 0 \\ 4 + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il valore di z dall'ultima equazione

$$4 + 2z - 6 = 0$$

$$z = 1$$

e sostituiamo nelle rimanenti

$$\begin{cases} y = 4 \\ z = 1 \\ 3x - 1 - 20 = 0 \\ x + 3 - 10 = 0 \end{cases}$$

Come ci aspettavamo, sia dalle terza che dalla quarta equazione si ottiene $x = 7$, dunque le rette si intersecano nel punto $Q(7, 4, 1)$.

- sghembe: non essendo parallele, non hanno nessun punto in comune (stanno su due piani diversi).
- perpendicolari: $v \perp v_1 = (a_1 * a_2) + (b_1 * b_2) + (c_1 * c_2) = 0$

Da un punto di vista puramente geometrico due rette si dicono ortogonali se:

- giacendo sullo stesso piano sono incidenti e formano quattro angoli retti;

- appartengono a piani distinti tra loro ortogonali.

Da questa definizione vien fuori un'importantissima proprietà; anche due **rette sghembe possono essere tra loro perpendicolari**.

Retta passante per due punti

Scegliamo le coordinate di uno dei due punti e come vettore direzione il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$

Esempio retta passante per $P(1, 2, 3)$ e $Q(2, 1, -5)$

$\overrightarrow{PQ} = (1, -1, -8) = i - j - 8k$

Scegliamo il punto P

$$retta : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Retta parallela al vettore $v = i - j + k$ e passante per $P(1, 4, -9)$

$$retta : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Retta parallela all'asse y passante per $P(2, 4, -1)$

$v = 0i + j + 0k = j$

$$retta : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Retta parallela a una retta data passante per $P(-10, 3, 2)$

$$retta : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$retta \parallel : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Retta passante per $P(7, 3, 5)$, incidente e perpendicolare all'asse x

- Per essere perpendicolari, il versore della retta v deve essere perpendicolare al versore dell'asse x i → $v \cdot i = 0$
- La retta è incidente all'asse x, il che significa che deve passare per un punto dell'asse x, avente cioè coordinate $(x^*, 0, 0)$
- Poiché la retta è perpendicolare all'asse x, l'ascissa deve essere uguale a quella del punto, quindi $x^* = 7 \rightarrow P_2(7, 0, 0)$

La retta dovrà passare per il punto P e P_2

$\overrightarrow{P_2P} = (0, 3, 5)$

Scegliamo il punto P

$$retta : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Punto in comune tra due rette

$$s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad t : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Eliminando x^*, y^*, z^*

$$\begin{cases} 1 + t_1 = 2 + 2t_2 \\ 2 - 3t_1 = t_2 \\ 3 + 2t_1 = 1 - t_2 \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono verificate se $t_1 = \frac{5}{7}$ e $t_2 = \frac{-1}{7}$, ma questi valori non soddisfano la terza equazione e quindi le due rette **NON** hanno alcun punto in comune.

Un punto $P(-1, 9, -2)$ appartiene a una retta data?

$$r : xi + yj + zk = (2 + t)i + (3 - 2t)j + (4 + t)k$$

Deve esistere un particolare valore del parametro tale per cui le tre relazioni devono essere simultaneamente verificate. Deve esistere un unico t che verifichi le tre equazioni.

$$\begin{cases} -1 = 2 + t \\ 9 = 3 - 2t \\ -2 = 4 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -6 \end{cases}$$

Poiché le tre equazioni non sono verificate simultaneamente, P non appartiene a r

Piano e retta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \beta : ax + by + cz = d$$

- retta contenuta in β: si prendono le coordinate del punto (x_0, y_0, z_0) e si inseriscono nell'equazione del piano: $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$
  - Oppure $\rightarrow n \cdot v = 0, P_0(x_0, y_0, z_0) \in \beta$
- retta $\parallel$ Piano: se n (versore del piano) e v (versore della retta), $n \cdot v = 0$, e $P(x_0, y_0, z_0) \notin \beta$
- retta incidente al piano: $n \cdot v \neq 0$
- retta $\perp$ β: $v = \lambda n$ (i due vettori devono essere paralleli)
- determinare il punto di intersezione tra retta e piano:

  Metto a sistema l'equazione cartesiana della retta, con l'equazione del piano.

  Trovo la t e la sostituisco per trovare (x, y, z)

DETERMINO IL PUNTO DI INTERSEZIONE H TRA LA RETTA E IL PIANO

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2t + 6 \\ z = 4t \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2t - (-2t + 6) + 2 \cdot 4t &= 0 \\ 12t &= 6 \\ t &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \longrightarrow H = (1, 5, 2)$$

Rette e fasci di piani

Scrivere la retta in forma **cartesiana** e utilizzare la formula del fascio di piani.

Esempio

$$s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x - 2 = 3 - y = \frac{z-1}{2}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y + z = 7 \end{cases}$$

$$Fascio : \lambda(x + y - 5) + u(2y + z - 7)$$

Piano passante per una retta e un punto

Scrivere l'equazione del piano β contenente il punto $P(6,1,1)$ e la retta

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Preso il vettore direzione v_r della retta e un punto Q appartenente ad essa, il piano β sarà $\perp$ ai vettori v_r e $\overrightarrow{QP}$ e passerà per P.

Ponendo $z = t$ nelle equazioni cartesiane della retta si ricava:

$x = 2 - 2t$ e $y = x - z - 3 = -1 - 3t$

$$s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pertanto $v_r = 2i + 3j - k$ e $Q(2,-1,0)$

$\overrightarrow{QP} = (4,2,1) = 4i + 2j + k$

Il vettore $v_\beta \perp \beta$ è perpendicolare anche a v_r e $\overrightarrow{QP}$

$$v_\beta = v_r \wedge \overrightarrow{QP} = 5i - 6j - 8k$$

$$d = 5 * 2 - 6 * (-1) - 8 * 0 = 16$$

$$\beta : 5x - 6y - 8z = 16$$

OPPURE

Il piano β appartiene senz'altro al fascio F avente la retta come supporto:

$$Fascio : \lambda(x + 2z - 2) + u(x - y - z - 3) = 0$$

e sarà l'unico piano di F a passare per il punto P, inserendo le coordinate di P nell'equazione di F ricaviamo l'uguaglianza:

$$\lambda(6 + 2 * 1 - 2) + u(6 - 1 - 1 - 3) = 0$$

$u = -6\lambda$, poniamo $\lambda = 1, u = -6$

$$\beta : (x + 2z - 2) + -6(x - y - z - 3) = 0 \rightarrow \quad \beta : 5x - 6y - 8z = 16$$

Distanze nello spazio

Distanza punto - punto

$$dist(P_0, P_1) = ||\overrightarrow{P_0P_1}|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Distanza punto - piano

É la distanza tra il punto e la **proiezione ortogonale del punto sul piano**

$P^*(x^*, y^*, z^*)$, β che passa per $P_0(x_0, y_0, z_0) \perp v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$d = ax_0 + by_0 + cz_0$

$$dist(\beta, P^*) = \frac{|ax^* + by^* + cz^* - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

▼ **Dimostrazione**

$$dist = ||\frac{\overrightarrow{P_0P^*}v}{v \cdot v}v|| = \frac{|\overrightarrow{P_0P^*}v|}{||v^2||}\cancel{v} = \frac{|a(x^* - x_0) + b(y^* - y_0) + c(z^* - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax^* + by^* + cz^* - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dimostrazione della formula per la distanza punto-piano

Vediamo come ricavare la formula della distanza di un punto da un piano. Siano

$P(x_P, y_P, z_P)$

le coordinate di un punto dello spazio e

$\alpha: \ ax + by + cz + d = 0$

l'equazione cartesiana di un piano. Dobbiamo dimostrare che

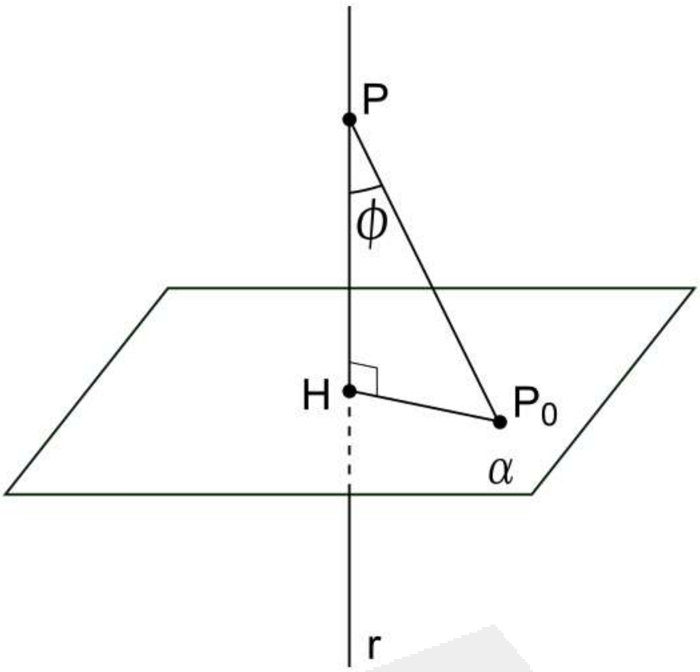
$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Siano H la proiezione ortogonale di P su α e r la retta passante per i punti P, H, nonché la retta passante per P e ortogonale ad α.

Indicando con $\mathbf{v}_r$ un qualsiasi vettore direttore della retta r e con $\mathbf{n}_\alpha$ il vettore dei coefficienti direttori del piano, abbiamo che

$\mathbf{v}_r = \mathbf{n}_\alpha = (a, b, c)$

Detto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto del piano α distinto da H, costruiamo il triangolo di vertici P, P_0, H.



Dimostrazione della formula per la distanza punto-piano.

Ogni retta del piano α è ortogonale alla retta r, dunque la retta passante per i punti P_0 e H è perpendicolare alla retta r.

Da qui segue che il triangolo di vertici P, P_0, H è un triangolo rettangolo di ipotenusa $\overline{PP_0}$.

La distanza di P da α è, per definizione, la distanza tra i punti P e H, ossia

$d(P,\alpha) = d(P,H) = \overline{PH}$

Sappiamo dai teoremi trigonometrici sul triangolo rettangolo che ciascun cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente ad esso, quindi nel nostro caso

$$\overline{PH} = \overline{PP_0}\cos(\phi)$$

e dunque

$$d(P, \alpha) = \overline{PH} = \overline{PP_0}\cos(\phi)$$

Poniamo

$$\mathbf{u} := \overrightarrow{PP_0}$$

per cui la lunghezza del segmento $\overline{PP_0}$ coincide con la norma del vettore $\mathbf{u}$

$$\overline{PP_0} = ||\mathbf{u}||$$

e l'angolo ϕ è l'angolo acuto formato dai vettori $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{u}$.

Indicando con $\cdot$ il prodotto scalare canonico, sappiamo che vale la relazione la seguente relazione per l'angolo acuto tra vettori

$$\cos(\phi) = \frac{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}_r||\ ||\mathbf{u}||}$$

Nelle nostre ipotesi $\mathbf{v}_r$ è un qualsiasi vettore direttore della retta r, cosicché sappiamo quale direzione individua ma non aprioristicamente quale sia il suo verso. Alla luce di tale generalità i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}_r$ possono formare un angolo acuto o un angolo ottuso: il valore assoluto al numeratore garantisce che ϕ sia un angolo acuto. In caso di dubbi vi invitiamo a dare un'occhiata alla pagina dedicata all'orientazione di una retta.

Tornando a noi, sostituiamo l'espressione di $\cos(\phi)$ in termini dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}_r$

$$d(P, \alpha) = \overline{PP_0}\cos(\phi) =$$

$$= ||\mathbf{u}|| \frac{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}_r||\ ||\mathbf{u}||} = \frac{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}_r||}$$

Le componenti del vettore $\mathbf{u}$ sono date dalla differenza delle coordinate dei punti che lo definiscono

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x_P,\ y_0 - y_P,\ z_0 - z_P)$$

D'altro canto le componenti del vettore $\mathbf{v}_r$ sono

$$\mathbf{v}_r = (a, b, c)$$

dunque

$$|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}| = |(a, b, c) \cdot (x_0 - x_P,\ y_0 - y_P,\ z_0 - z_P)| =$$

$$= |a(x_0 - x_P) + b(y_0 - y_P) + c(z_0 - z_P)| =$$

$$= |ax_0 - ax_P + by_0 - by_P + cz_0 - cz_P| =$$

$$= |ax_P + by_P + cz_P - ax_0 - by_0 - cz_0| =$$

$$= |ax_P + by_P + cz_P + d|$$

L'ultima uguaglianza deriva dall'appartenenza del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al piano α, infatti

$$P_0 \in \alpha \iff ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \iff$$

$$\iff d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Infine

$$||\mathbf{v}_r|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

e quindi

$$d(P, \alpha) = \frac{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}_r||} = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

da cui la tesi.

Distanza piano - retta

$$\beta : P_0(x_0, y_0, z_0) \perp v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad r : P_1(x_1, y_1, z_1) \quad v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

- retta $\in \beta$ → *distanza* = 0
- retta e β sono incidenti → *distanza* = 0
- retta $||$ β → $dist(P_1, \beta)$ distanza punto - piano

Distanza tra due piani

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z \quad \beta : a_2x + b_2y + c_2z$$

- coincidenti → *distanza* = 0
- incidenti → *distanza* = 0
- paralleli → $dist(P_1, \beta)$ distanza punto - piano

TROVO UN PUNTO APPARTENENTE AL PIANO DI EQUAZIONE $2x-4y-2z-4=0$:
SCELGO $x=0, y=0 \longrightarrow 2\cdot 0-4\cdot 0-2z-4=0 \longrightarrow z=-2 \longrightarrow (0,0,-2)$

Distanza punto - retta

1. Ricaviamo l'equazione del piano $\beta \perp retta$, passante per il punto $P(x_0, y_0, z_0)$.
2. Determiniamo dove la retta interseca il piano β, chiamando H questo punto
3. Calcolare la distanza tra il punto P e il punto H

Se il punto appartiene alla retta, la distanza punto-retta è **nulla**.

OPPURE:

(con $||v \wedge \overrightarrow{P_0P^*}||$ si indica il modulo del prodotto vettore, quindi la $\sqrt{i^2+j^2+k^2}$ dati dal risultato dell'operazione.

$$dist(r, P^*) = \frac{||v \wedge \overrightarrow{P_0P^*}||}{||v||} \rightarrow \frac{||v \wedge \overrightarrow{P_0P^*}||}{\sqrt{i^2+j^2+k^2}}$$

$$dist(r, P^*) = \frac{||v \wedge \overrightarrow{P_0P^*}||}{||v||} \rightarrow \frac{||v \wedge \overrightarrow{P_0P^*}||}{\sqrt{i^2+j^2+k^2}}$$

Distanza tra due rette

$r_1 : P_1(x_1, y_1, z_1)$ diretta come v_1, $r_1 : P_1(x_1, y_1, z_1)$ diretta come v_2

- coincidenti, incidenti → *distanza* = 0
- parallele → $dist(P_1, r_2)$, distanza punto - retta
- sghembe :

$$dist(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (v_1 \wedge v_2)|}{||v_1 \wedge v_2||}$$

OPPURE:

Indicando con r, s due rette sghembe, la loro distanza è la distanza di un punto qualsiasi della retta r dal piano α passante per s e parallelo a r.

Per determinare $d(r,s)$ procediamo nel modo seguente:

- scriviamo l'equazione cartesiana del piano α passante per la retta s e parallelo a r (se non ricordate come fare: piano passante per una retta e parallelo a un'altra retta). Sia essa

$\alpha: \ ax + by + cz + d = 0$

- Fissiamo un qualsiasi punto $P(x_P, y_P, z_P)$ della retta r.

- Calcoliamo la distanza del punto P dal piano α usando la formula per la distanza punto-piano

$$d(P,\alpha) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

dove a, b, c sono i coefficienti delle incognite dell'equazione cartesiana del piano α.

- Finito! La distanza $d(P,\alpha)$ uguaglia la minima distanza tra le rette sghembe r, s

$$d(r,s) = d(P,\alpha)$$

Piano passante per una retta e parallelo a un'altra retta

> **Esempio**
>
> Risolviamo l'esercizio proposto a titolo di esempio. Dobbiamo determinare l'equazione del piano contenente la retta
>
> $$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$
>
> e parallelo alla retta
>
> $$s: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$
>
> *Svolgimento*: la retta r è già in forma cartesiana, dunque scriviamo direttamente l'equazione del fascio di piani che ha r come sostegno
>
> $\mathrm{F}: \ \lambda(x - y + z) + \mu(x + 2z - 1) = 0$
>
> $\mathrm{F}: \ (\lambda + \mu)x - \lambda y + (\lambda + 2\mu)z - \mu = 0$
>
> Determiniamo le componenti del vettore dei coefficienti direttori dei piani del fascio
>
> $\mathbf{n}_{\mathrm{F}} = (\lambda + \mu, \ -\lambda, \ \lambda + 2\mu)$

Dopodiché troviamo il vettore direzione della retta s

$$\mathbf{v}_s = (2, 2, -2)$$

e imponiamo che il prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{n}_{\mathrm{F}}$ e $\mathbf{v}_s$ sia nullo

$$\mathbf{n}_{\mathrm{F}} \cdot \mathbf{v}_s = 0$$

$$(\lambda + \mu, \ -\lambda, \ \lambda + 2\mu) \cdot (2, 2, -2) = 0$$

$$2\lambda + 2\mu - 2\lambda - 2\lambda - 4\mu = 0$$

$$-2\lambda - 2\mu = 0$$

$$\lambda + \mu = 0$$

Una delle soluzioni della precedente equazione è

$$(\lambda, \mu) = (1, -1)$$

dunque, nell'equazione del fascio

$$\mathrm{F}: \ (\lambda + \mu)x - \lambda y + (\lambda + 2\mu)z - \mu = 0$$

sostituiamo $\lambda = 1$ e $\mu = -1$, ottenendo il piano di equazione

$$\alpha: \ -y - z + 1 = 0$$

che è il piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.

▼ Dimostrazione

$$dist(r_1, r_2) = \left|\left| \frac{\overrightarrow{P_1P_2}(v_1 \wedge v_2)}{(v_1 \wedge v_2)\cancel{(v_1 \wedge v_2)}} \cancel{(v_1 \wedge v_2)} \right|\right| \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (v_1 \wedge v_2)|}{||v_1 \wedge v_2||}$$