GERARCHIA INFINITI $= \partial \log_a n < \partial n^\alpha < \partial a^n < \partial n! < \partial n^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \partial n! > \partial a^n$

FORMULA DI STIRLING $= n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1$
- $\lim_{n\to+\infty} (1+ny)^{1/n} = e^n \quad y \to 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+y)}{y} = 1 \quad y\to 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^y-1}{y} = \log a \quad y \to 0$
- $\varepsilon_n \to 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = 1 \quad \varepsilon_n \xrightarrow{\text{tende}} 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\gamma_n)^\alpha - 1}{\gamma_n} = \alpha$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1 \quad \varepsilon_n \xrightarrow{\text{tende}} 0 \Rightarrow \frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{sh}\, \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2} \quad \varepsilon_n \xrightarrow{\text{tende}} 0 \Rightarrow \frac{1-\mathrm{ch}\,\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{arctg}\,\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

ASINTOTICI: $x \to 0$

$e^{\square}-1 \sim \square \qquad a^{\square}-1 \sim \square \ln a$

$\sin\square \sim \square \qquad \arcsin\square \sim \square \qquad \tan\square \sim \square$

$1-\cos\square \sim \frac{\square^2}{2} \qquad \cos\square - 1 \sim -\frac{\square^2}{2}$

$\ln(1+\square) \sim \square \qquad \sqrt[n]{1+\square} - 1 \sim \frac{\square}{n}$

$(1+\square)^\alpha - 1 \sim \alpha\square$

$\tan\square \sim \square \qquad \mathrm{arctg}\,\square \sim \square$

FORME DI INDETERMINAZIONE $\to \left[\frac{0}{0}\right]; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; [\infty \cdot 0]; [\infty - \infty], [1^\infty][0^0][\infty^0]$

Se $x \to -\infty \quad \mathrm{arctg}\, x^2 - \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{x^2}$

Se $x \to +\infty \quad \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$

Se $x \to \frac{\pi}{2}$, $\tan x \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$

$\partial f = \partial g = 6$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{2n} \Rightarrow 1^\infty \Rightarrow \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{2n} = \underbrace{\left(\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}\right)}_{\to e}^{\frac{3}{n-2}\cdot 2n} = e^{\frac{6n}{n-2}} = e^6$$

Serie $\to \cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}, \quad \log n \leq \sqrt{n}, \quad \log\square \underset{\square\to 1}{\sim} \square - 1$

$A^B = e^{B\ln A}$

$2^{-\infty} = 0$

	$x\to\infty$	$x\to 0$	$x \to c$ $(1, \pi; 2...)$
INFINITO CAMPIONE STANDARD	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-c}$
INFINITESIMO CAMPIONE STANDARD	$\frac{1}{x}$	x	$x-c$

Tabella dei limiti

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x\to 0\ pos}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 1$	$\lim\limits_{x\to -1\ negat}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to -1\ pos}(1+x)^{\frac{1}{x}} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a \quad a>0$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\lambda}-1}{x} = \lambda$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\arccos x)^2}{1-x} = 2$
$\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\alpha}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \log_{\alpha}e$	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\log_{\alpha}(1+x)} = \dfrac{1}{\log_{\alpha}e}$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty}a^x = 0$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$

Tabella degli Asintotici (per x → 0) $\Rightarrow$ = *asintotico a..*

$\sin x \Rightarrow x$	$\sin x - x \Rightarrow \dfrac{x^3}{6}$
$e^x-1 \Rightarrow x$	$\ln(1+x) \Rightarrow x$
$\log_a(1+x) \Rightarrow \dfrac{x}{\ln a}$	$a^x-1 \Rightarrow x\ln a$
$(1+x)^k \Rightarrow 1+kx$	$\tanh x \Rightarrow x$
$1-\cos x \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}$	$\tan x \Rightarrow x$
$\sinh x \Rightarrow x$	$\arctan x \Rightarrow x$
$\cosh x - 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}$	$\arcsin x \Rightarrow x$
$x-\sin x \Rightarrow \dfrac{x^3}{6}$	

Forme indeterminate

$\dfrac{0}{0} \qquad \dfrac{\infty}{\infty} \qquad 0\cdot\infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad +\infty-\infty$

SVILUPPI DI MAC LAURIN delle funzioni elementari Resto secondo PEANO

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$Ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$ ← SOLO POTENZE PARI

$$Sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$ ← SOLO POTENZE DISPARI

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$ ← Ch x con segni alternati

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$ ← Sh x con segni alternati

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$ ← Segni alterni, senza fattoriale

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$ ← Senza fattoriale, coeff. binomiale

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

non si scrive $\alpha!$

Se $\alpha = -1$ $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + \binom{1/2}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$ per $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^9)$$ $|x| < 1$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$$ $|x| < 1$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$$ $|x| < 1$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31}{15120}x^5 + o(x^5)$$

TEOREMA → data f, derivabile n volte in x_0 $\exists!$ (esiste ed è unico) polinomio $T_{n,x_0}(x)$, grado $\leq n$, che ha in comune con $f(x)$ i valori di tutte le derivate fino all'ordine n in $x = x_0$

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

] POLINOMIO DI TAYLOR → centrato in x_0, di grado n
Tutti i coeff sono la derivata della funzione.

↳ polinomio di grado n, centrato in x_0, di x

Se il polinomio di TAYLOR è centrato nell'origine $(x_0 = 0)$ → POLINOMIO DI MAC LAURIN

$x_0 = 0$ $\quad T_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\cdot\frac{(x-0)^2}{2!} + \dots + f^n(0)\cdot\frac{(x-0)^n}{n!}$

Esempio MAC LAURIN, ordine 3 $\quad f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = \cos 0 = 1 \quad f''(0) = -\sin 0 = 0 \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1$

MAC LAURIN $\quad T_{3,0} = 0 + 1\cdot(x-0) + 0\cdot\frac{(x-0)^2}{2!} - 1\frac{(x-0)^3}{3!} \Rightarrow x - \frac{x^3}{3!}$

SVILUPPO DI TAYLOR → $f(x) = T_{n,x_0}(x)$ + resto → Peano (descrizione qualitativa)

RESTO SECONDO PEANO

T: $f(a;b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a;b)$ allora $f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{resto}}$

Esempio $x_0 = 0$, $n = 2$ $\quad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

f derivabile 2 volte in $x = 0$

DIMOSTRO: dobbiamo far vedere che $\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2}}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}^{o(x)}}{2x} = 0$

f' è derivabile in 0, $\quad g$ derivabile in x_0: $g(x_0+h) - g(x_0) = g'(x_0)h + o(h)$ ← definizione

$x_0 = 0, h = x \quad g(x) - g(0) = g'(0)x + o(x) \qquad g = f'(x) \quad f'(x) - f'(0) = f''(0)x + o(x)$

RESTO SECONDO LAGRANGE → $f(x) = T_{n,x_0}(x)$ + resto → Lagrange (descrizione quantitativa)

SVILUPPO DI TAYLOR

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$ $\quad f$ è derivabile $n+1$ volte in $[a;b]$

allora $\exists\, c$ tra x_0 e x: $f(x) = T_{n,x_0}(x) + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

derivata $n+1$ esima

DIMOSTRAZIONE $\quad x_0 = a,\ x = b,\ n = 1$

$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}$

$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = K(b-a)^2$ → deve essere $f''(c)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}$

$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - K(b-x)^2$ $\qquad g(b) = 0,\ g(a) = 0$

sostituiamo la "a" con le x $\qquad$ Se metto b al posto di x $\qquad$ poiché K deve verificare l'uguaglianza

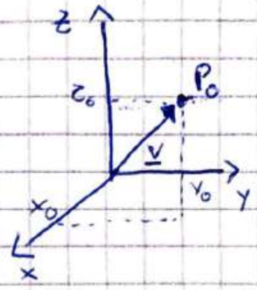
$\exists\, c: g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow g'(x) = \cancel{-f'(x)} \cancel{+f'(x)} - f''(x)(b-x) + 2K(b-x)$

$g'(c) = -f''(c)\cdot(b-c) + 2K(b-c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f''(c)}{2}$

NON CONOSCEREMO MAI c, quindi non sapremo mai quanto vale l'errore.

Geometria Analitica

Vettore → è un segmento orientato che ha (direzione, verso e modulo)
- direzione → segmento su cui poggia il vettore;
- verso → punta del vettore
- modulo → lunghezza del segmento (detto anche norma) $\|v\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$



versore → vettore di modulo unitario → $\frac{\underline{v}}{\|v\|}$
punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$
vettore nullo → $\underline{v} = (0;0;0)$

$P_A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ $P_B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ $\overrightarrow{P_AP_B} = \underline{v} = \begin{bmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{bmatrix} = (x_B-x_A)+(y_B-y_A)+(z_B-z_A)$ $\underline{V} = \overrightarrow{OP_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

Prodotto di un vettore per un numero (il prodotto anch'esso è un vettore)

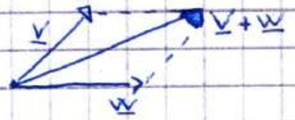
dato $\underline{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \underline{v}$
- stessa direzione
- stesso verso, oppure opposto $(\lambda > 0 \vee \lambda < 0)$
- lunghezza $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

Es: se $\lambda = 3$, la direzione è uguale, il verso anche, la lunghezza è 3 volte quella di $\underline{v}$
$\lambda \underline{v} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ oppure $\underline{v} = 0$

$\lambda v = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{bmatrix}$ $-\underline{v} = (-1) \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{bmatrix}$

Proprietà omogeneità → $\lambda(\mu \underline{v}) = (\lambda\mu) \cdot \underline{v}$
compatibilità → $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
distributiva → $\lambda(\underline{v}+\underline{w}) = \lambda \underline{v} + \lambda \underline{w}$ $(\lambda+\mu)\underline{v} = \lambda \underline{v} + \mu \underline{v}$

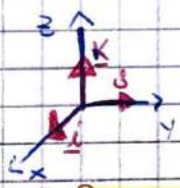
Somma tra due vettori, dati $\underline{v}$ e $\underline{w}$, $\underline{v}+\underline{w}$ si esegue con la regola del parallelogramma.



Proprietà commutativa → $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
associativa → $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$
∃ elemento neutro → $\underline{z}: \forall \underline{v} + \underline{z} = \underline{v}$ $\underline{z} = 0 \Rightarrow \underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$
∃ opposto → $\forall \underline{v} \neq 0$ $\exists \underline{u}: \underline{v}+\underline{u} = \underline{u}+\underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{u} = -\underline{v}$

$\underline{v}+\underline{w} = (v_1+w_1)+(v_2+w_2)+(v_3+w_3)$

Versori



$i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$

$\underline{i} = \hat{u}_x$ $\underline{j} = \hat{u}_y$ $\underline{k} = \hat{u}_z$

Prodotto scalare → prodotto tra due vettori che dà come risultato un numero scalare

$\underline{v} \cdot \underline{w} = \|v\| \cdot \|w\| \cos\alpha$

proprietà commutativa $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$
omogeneo $(\lambda \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot (\lambda \cdot \underline{w}) = \lambda(\underline{v} \cdot \underline{w})$
distributiva $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$
positività $\underline{u} \cdot \underline{u} \geq 0$ e $\underline{u} \cdot \underline{u} = 0 \iff \underline{u} = 0$
↳ $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{w} \Rightarrow \underline{v} \cdot \underline{w} \cdot \cos 90° = 0$ con $\underline{v}, \underline{w} \neq 0$

Proprietà $\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$ $\underline{w} = w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k} \Rightarrow \underline{w} \cdot \underline{v} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

Dimostrazione $\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 (i \cdot i) + \cancel{v_1 w_2 (i \cdot j)} + \cancel{v_1 w_3 (i \cdot k)} + \cancel{v_2 w_1 (j \cdot i)} + v_2 w_2 (j \cdot j) + \cancel{v_2 w_3 (j \cdot k)} + \cancel{v_3 w_1 (k \cdot i)} + \cancel{v_3 w_2 (k \cdot j)} + v_3 w_3 (k \cdot k)$

↳ sono ⊥, quindi il prodotto è uguale a 0.

$= v_1 w_1 + v_2 w_2 + w_3 v_3$

PRODOTTO VETTORIALE → prodotto che da come risultato un vettore

$\underline{v} \times \underline{w}$ → • direzione perpendicolare a entrambi
• verso tale che $\underline{v}, \underline{w}$ e $\underline{v} \times \underline{w}$ formano la terna destrorsa
v = pollice, w = indice, $\underline{w} \times \underline{v}$ = medio (INDICE, POLLICE, MEDIO)
• larghezza → $\|\underline{v} \times \underline{w}\|$ è $= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\alpha$

PROPRIETÀ anticommutativa → $\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$
omogeneità → $(\lambda \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{v} \times (\lambda \underline{w}) = \lambda (\underline{v} \times \underline{w})$
distributiva → $\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w}$

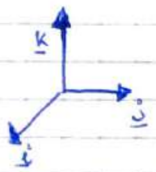
Se $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{0}$ $(\underline{v}, \underline{w} \neq 0) \Rightarrow \underline{v} \,//\, \underline{w}$ (parallelo) $\quad (\underline{v} = \lambda \underline{w}) \to \underline{w} \times \underline{v} \cdot \sin 0 = 0$

PROPRIETÀ → $V = (v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}) \qquad W = (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k})$

$$\boxed{\underline{v} \times \underline{w}} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)\underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\underline{k}$$

DIMOSTRAZIONE → $\underline{v} \times \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) \times (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}) =$

$= \cancel{v_1 w_1 (\underline{i} \times \underline{i})} + v_1 w_2 (\underline{i} \cdot \underline{j}) + v_1 w_3 (\underline{i} \cdot \underline{k}) + v_2 w_1 (\underline{j} \times \underline{i}) + \cancel{v_2 w_2 (\underline{j} \times \underline{j})} + v_2 w_3 (\underline{j} \times \underline{k}) + v_3 w_1 (\underline{k} \cdot \underline{i}) + v_3 w_2 (\underline{k} \cdot \underline{j}) + \cancel{v_3 w_3 (\underline{k} \cdot \underline{k})}$



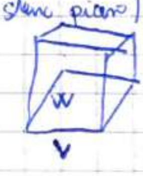
$\underline{i}(v_2 w_3 - v_3 w_2) + \underline{j}(v_3 w_1 - v_1 w_3) + \underline{k}(v_1 w_2 - v_2 w_1)$

OPPURE $\underline{v} \times \underline{w} = \Delta \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{i} & \underline{j} \\ v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{matrix} = \underline{i}(v_2 w_3) + \underline{j}(v_3 w_1) + \underline{k}(v_1 w_2) - (w_1 v_2)\underline{k} - (v_3 w_2)\underline{i} - (v_1 w_3)\underline{j}$

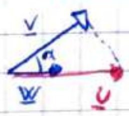
$= \underline{i}(v_2 w_3 - v_3 w_2) + \underline{j}(v_3 w_1 - v_1 w_3) + \underline{k}(v_1 w_2 - v_2 w_1)$

PRODOTTO MISTO → $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ è $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ Si fa sempre prima il prodotto vettoriale

PROPRIETÀ ciclica: $\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} \times \underline{u} = \underline{w} \cdot \underline{v} \times \underline{u}$
→ $\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w} = 0 \iff \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ complanari (stanno nello stesso piano)
→ $\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w} \neq 0 \Rightarrow \|\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w}\|$ = volume parallelepipedo

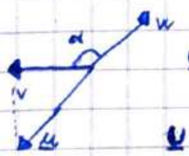


IL PRODOTTO SCALARE È LEGATO ALLE PROIEZIONI ORTOGONALI



$\underline{u}$ → proiezione ortogonale di $\underline{v}$ nella direzione di $\underline{w}$
$\underline{u} = \lambda \underline{w}$ (α è acuto $(< 90°)$, $\lambda > 0$) $\Rightarrow \|\underline{u}\| = \|\underline{v}\| \cos\alpha = \dfrac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\underline{w}\|} \Rightarrow \underline{u} = \dfrac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\underline{w}\|} \cdot \dfrac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$ (versore)

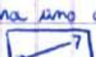
uguali



$\underline{u} = \lambda \underline{w}$ (α è ottuso $(> 90°)$, $\lambda < 0$) $\Rightarrow \|\underline{u}\| = \|\underline{v}\|(-\cos\alpha) = \underline{u} = \dfrac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\underline{w}\|} \cdot \dfrac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$

$$\underline{u} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\underline{w}\|} \cdot \frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|} \Rightarrow \left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\underline{w}\|^2}\right) \underline{w} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\underline{w} \cdot \underline{w}}\right)}_{\text{scalare, numero } \lambda} \cdot \underline{w}$$

PIANO • 3 punti non allineati passa uno ed un solo piano
• 1 punto e due vettori



• 1 punto e un vettore perpendicolare

$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \qquad \underline{v} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k} \qquad P \in \text{piano} \iff \overrightarrow{P_0P} \perp \underline{v} \qquad \underline{v} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

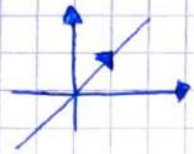
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad ax + by + cz = d$ ↳ $ax_0 + by_0 + cz_0$

$P_0 \equiv (2, 3, -1) \perp \underline{v} = 3\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$

$3x + y - z = 10$

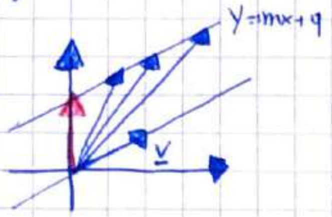
EQUAZIONE DELLA RETTA $y = mx + q$

La retta può essere vista anche come intersezione tra due piani
$(ax + by + cz = d)$ → equazione del piano (ce ne servono due per una retta)



$y = mx + q$ $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}}_{\underline{v}} \tau$ $\quad$ (se $x = \tau$, $y = m\tau$) $\tau \in \mathbb{R}$

↳ sono multipli di $\underline{v}$ (aumentando o diminuendo $\underline{v}$, troviamo tutti i punti)



$x = \tau \quad y = m\tau + q \quad \begin{cases} x = \tau \\ y = m\tau + q \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} + \tau \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}}_{\underline{v}}$

eq. retta che passa per $P_0(x_0; y_0)$ diretta come $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\underline{i} + b\underline{j}$
è un'eq. per cui $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\tau \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = x_0 + a\tau \\ y = y_0 + b\tau \end{cases} \quad \dfrac{x - x_0}{a} = \tau \quad \dfrac{y - y_0}{b} = \tau \Rightarrow \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ EQ. GENERALE

È la stessa anche in 3 dimensioni → eq. retta $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ diretta come $\underline{v} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x = x_0 + a\tau \\ y = y_0 + b\tau \\ z = z_0 + c\tau \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + 2\tau \\ y = 2 - \tau \\ z = 1 + 3\tau \end{cases} \quad \tau = \dfrac{x - 3}{2} \quad \tau = 2 - y \quad \tau = \dfrac{z - 1}{3}$

EQ. GENERALE → $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

$\dfrac{x - 3}{2} = 2 - y = \dfrac{z - 1}{3}$ $\quad \left.\begin{array}{l} x - 3 = 4 - 2y \\ 6 - 3y = z - 1 \end{array}\right\}$ due eq. ciascuna di esse è l'eq. di un piano. Insieme sono l'eq. di una retta

Da cartesiano a vettoriale

$r: \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ prendiamo una variabile qualunque e la poniamo $= a\ \tau$

$x = \tau \Rightarrow \begin{cases} z = x + 3y - 2 \\ y = 1 - 2\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \tau + 3 - 6\tau - 2 \\ y = 1 - 2\tau \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 5\tau \\ x = \tau \\ y = 1 - 2\tau \end{cases}$

DUE PIANI

$\wp_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad \wp_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ (eq. di due piani)(vettori ⊥)

I piani possono essere: coincidenti

i vettori sono uguali $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$

paralleli

sono proporzionali (multipli) $\Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$

incidenti $\nexists\ \lambda: \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_1} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_2}$ non esiste costante di proporzionalità

↳ caso particolare → $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0 \Rightarrow \underline{v}_1 \perp \underline{v}_2 \Rightarrow \wp_1 \perp \wp_2$

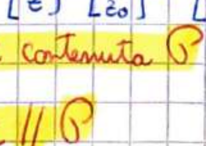
PIANO E RETTA

$\wp: ax + by + cz = d \qquad \wp \perp \underline{v}_p = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$ (il vettore derivato dall'eq. del piano, è perpendicolare al piano)

$r: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ $\quad P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ parallela $\underline{v}_r = \alpha\underline{i} + \beta\underline{j} + \gamma\underline{k}$

- r contenuta $\wp$ → $P_0 \in \wp$ (si prendono le coordinate del punto e si mettono nell'eq. del piano) $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$
  $\underline{v}_p \cdot \underline{v}_r = 0 \Rightarrow \underline{v}_p \perp \underline{v}_r$
- $r \parallel \wp$ → $P_0 \notin \wp \rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 \neq d$

r e $\wp$ saranno incidenti: $\underline{v}_p \cdot \underline{v}_r \neq 0$ (i due vettori non sono perpendicolari)



↳ caso particolare: $r \perp \wp$: $\underline{v}_r = \lambda \underline{v}_p$ (i due vettori devono essere paralleli)

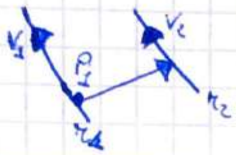
DUE RETTE

$r_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_1}$ $\qquad r_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + t \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_2}$

- coincidenti → se sono uguali $\underline{v}_2 = \lambda \underline{v}_2$ → $\exists\, \alpha : \overrightarrow{P_1P_2} = \alpha \underline{v}_1$ (o $\alpha \underline{v}_2$) $\overrightarrow{P_1P_2}$ é parallelo a $\underline{v}_1$ o $\underline{v}_2$
- parallele → se sono parallele $\underline{v}_1 // \underline{v}_2$ → $\nexists\, \alpha : \overrightarrow{P_1P_2} = \alpha \underline{v}_1$ (o $\alpha \underline{v}_2$) $\overrightarrow{P_1P_2}$ non é parallelo a $\underline{v}_1$ o $\underline{v}_2$
- incidenti → non essendo parallele, hanno un punto in comune
- sghembe → non essendo parallele, non hanno nessun punto in comune → stanno su due piani diversi

$\nexists\, \lambda : \underline{v}_1 = \lambda \underline{v}_2$, $\underline{v}_1 \not\parallel \underline{v}_2$ → non é parallela → $\forall t_1, t_2$

→ $\exists t_1, t_2 :$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$



PARALLELE → $\underline{v} = \lambda \underline{v}'$

PERPENDICOLARI → $\underline{v} \perp \underline{v}_1$ → $(a \cdot a_1) + (b \cdot b_1) + (c \cdot c_1) = 0$

Se $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ $\quad r_1$ e r_2 sono perpendicolari (che siano incidenti o sghembe)

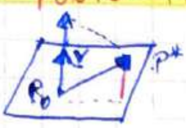
DISTANZA PUNTO - PUNTO

$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $\quad P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{distanza}(P_0, P_1) = \|\overrightarrow{P_0P_1}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

DISTANZA PUNTO - PIANO

$P^*(x^*, y^*, z^*)$ $\quad \pi$ che passa per $P_0(x_0, y_0, z_0) \perp \underline{v} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$



distanza $(\pi, P^*) = \|$ proiezione ortogonale di $\overrightarrow{P_0P^*}$ nella direzione di $\underline{v} \|$

$\overrightarrow{P_0P^*} = \begin{bmatrix} x^* - x_0 \\ y^* - y_0 \\ z^* - z_0 \end{bmatrix}$

$$\text{proiezione ortogonale} = \left\| \frac{\overrightarrow{P_0P^*} \cdot \underline{v}}{\underline{v} \cdot \underline{v}} \cdot \underline{v} \right\| = \frac{|\overrightarrow{P_0P^*} \cdot \underline{v}|}{\|\underline{v}\|^2} \|\underline{v}\| =$$

$$= \frac{|a(x^* - x_0) + b(y^* - y_0) + c(z^* - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax^* + by^* + cz^* - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$d = ax_0 + by_0 + cz_0$

$$\frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ ← coeff. piano

DISTANZA PIANO - RETTA

$\pi = P_0(x_0, y_0, z_0) \perp \underline{v} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $\qquad r : P_1(x_1, y_1, z_1)$ $\underline{v}_2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

- r contenuta in π → distanza = 0
- r e π sono incidenti → distanza = 0 (un punto della retta coincide con il piano)
- $r // \pi$ → distanza (r, π) = distanza (P_1, π) → Se $\underline{v}_\beta \perp v_p$ → $\underline{v}_\beta \cdot v_p = 0$

DISTANZA TRA DUE PIANI

$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ $\qquad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

- coincidenti → distanza = 0
- incidenti → distanza = 0
- paralleli → $P_1 \in \pi_1$ $\quad$ distanza (π_1, π_2) = distanza (P_1, π_2)

Esempio: $\left.\begin{array}{l} \pi_1 : x + 2y - 2z = 4 \\ \pi_2 = x + 2y - 2z = 2 \end{array}\right\}$ paralleli $\qquad P_1 \equiv (4, 0, 0) \in \pi_1$

$$\text{distanza}(P_1, \pi_2) = \frac{|4 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{1 + 2^2 + (-2^2)}} = \frac{2}{3}$$

DISTANZA PUNTO - RETTA

$\|\overrightarrow{QP}\| = \|\overrightarrow{P_0P^*}\| \cdot \sin\alpha$

$\|\underline{v} \times \overrightarrow{P_0P^*}\| = \|\underline{v}\| \cdot \|\overrightarrow{P_0P^*}\| \cdot \sin\alpha$

$$\text{distanza}(r, P^*) = \frac{\|\underline{v} \times \overrightarrow{P_0P^*}\|}{\|\underline{v}\|}$$

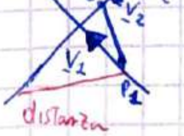
$\sqrt{\ }$ sotto radice quadrata perché é un modulo

formula robusta (fornisce il valore giusto, anche se P_0 é sulla retta)

DISTANZA TRA DUE RETTE

$r_1 : P_1(x_1, y_1, z_1)$ diretta con $\underline{v}_1$; $\quad r_2 : P_2(x_2, y_2, z_2)$ diretta con $\underline{v}_2$

- coincidenti, incidenti ⇒ distanza = 0 (hanno almeno un punto in comune)
- parallele → distanza (r_1, r_2) = distanza tra (P_1 e r_2)
- sghembe → sono su due piani diversi
  - → distanza = $\|$ proiezione ortogonale $\overrightarrow{P_1P_2}$ nella direzione di $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \|$



$$\text{distanza}(r_1, r_2) = \left\| \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)}{(\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)(\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)} (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2) \right\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)|}{\|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2\|}$$

↓

formula robusta (se la distanza é 0, le due rette non sono sghembe, ma incidenti)

DUE RETTE SONO PARALLELE → $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ $\quad a_1x+b_1y=c_1 \quad a_2x+b_2y=c_2 \quad \lambda V' = V$

RETTE PERPENDICOLARI → se i vettori direzione sono ⊥ → $V = ai + bj$ $\quad u \perp v \quad u = (-b)i + aj$
(Carte) $(a \cdot a_1) + (b \cdot b_1) + (c \cdot c_1) = 0$

FASCI DI PIANI → non paralleli → $P_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \quad P_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2$
λ e λ_2 (numeri reali) $\quad$ Fascio = $\lambda(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)=0$

paralleli → Fascio $= ax+by+cz=\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (numero reale)

AREA della figura tra due vettori $= \|V \times W\|$ $\quad$ VOLUME $= \|V \times W \cdot U\|$

INTEGRALE

Definizione: $f[a;b] \to \mathbb{R}$ $\quad f$ é limitata.

$x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4$ (a … b) $\quad h = \frac{b-a}{n} \quad x_j = x_0 + jh \quad \tau_j \in [x_{j-1}; x_j]$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)(x_j - x_{j-1})$$ SOMMA DI CAUCHY-RIEMANN

↑ lunghezza dell'intervallo

Si dice che $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f é limitata ed é integrabile su $[a;b]$ se presa una qualsiasi successione $\{S_n\}$ (somma di Cauchy-Riemann), esiste finito il $\lim_{n\to\infty} S_n$

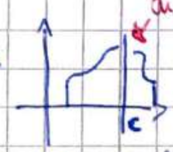
Se f é integrabile su $[a;b]$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$

FUNZIONE DI DIRICHLET → $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \text{ e } \notin \mathbb{Q} \text{ non razionali} \end{cases}$ $\quad$ 0 … 1 $\quad \tau_1 \in \mathbb{Q}\ \forall i\ S_n = 1$; $\tau_1 \notin \mathbb{Q}\ \forall i\ S_n = 0$
(funzioni non integrabili)

TEOREMA → Se $f \in \mathcal{C}[a;b] \Rightarrow$ é integrabile
TEOREMA → Se f (limitata) é monotona $\Rightarrow$ é integrabile
TEOREMA → Se $[a;c]$, $[c;b]$ (l'intervallo $[a;b]$ é diviso in due pezzi)
Se f_1 é integrabile su $[a;c]$, f_2 é integrabile su $[c,b]$ ⇒

$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & a \le x < c \\ \text{qualsiasi cosa} & x = c \\ f_2(x) & c < x \le b \end{cases}$ $\quad$ é integrabile su $[a;b]$

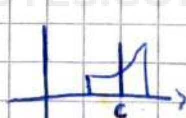
Es.



discontinuità

é integrabile

- Conseguenza: f integrabile su $[a;b]$
f^* é integrabile



la rendo discontinua in un punto
$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ K & x = c \end{cases}$

$$\int_a^b f^*\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$ L'integrale non é in grado di "sentire" cosa succede nei singoli punti

- Conseguenza: Se $f \in \mathcal{C}(a;b)$ $\quad \exists$ finiti $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x) \Rightarrow f$ é integrabile su $[a;b]$

Es: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad \int_1^{27} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad f \in \mathcal{C}[1;27]$ l'integrale esiste

$\exists \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \quad f \in \mathcal{C}(0;1] \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ quindi la f é integrabile in $(0;1]$, anche se l'intervallo é aperto in 0

PROPRIETÁ INTEGRALI

① LINEARITÁ → f, g sono integrali su $[a;b]$ ⇒ $(\alpha f(x) + \beta g(x))$ é integrabile su $[a;b]$

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx \pm \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

L'integrale della somma, é la somma degli integrali

Dimostrazione → $\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} (\alpha f(\tau_j) + \beta g(\tau_j)) = \alpha \left(\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) \right) + \beta \left(\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} g(\tau_j) \right)$

② ADDITIVITÁ → Se f é integrabile $[a;b]$ e $c \in (a;b)$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Se per convenzione $\int_b^a f = -\int_a^b f$ ~~allora~~ → allora la formula vale anche se $c<a$ o $c>b$

③ MONOTONIA → Se f é integrabile su $[a;b]$ e $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b]$ allora ⇒ $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

Dimostrazione $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) \geq 0$ (ogni S_n é ≥ 0 (teorema di permanenza del segno))

- conseguenza 1 → se f e g sono integrabili su $[a;b]$ e $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a;b]$

⇒ $\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$ $\qquad (f(x) - g(x)) \geq 0$

- conseguenza 2 → f integrabile su $[a;b]$ $\quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\underbrace{-\int_a^b |f(x)|\, dx}_{-\square} \leq \underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\star} \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|\, dx}_{\square}$$

$-\square \leq \star \leq \square$ → $|\star| \leq \square$

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Il modulo della somma é $\leq$ della somma dei moduli

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$-3 \leq x \leq 3 \quad |x| \leq 3$

MEDIA INTEGRALE → f integrabile su $[a;b]$, si chiama **media integrale** → definita per tutte le f integrabili

$$f_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

$f_M = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \left(\frac{\cancel{b-a}}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) \right)$ la media integrale é la media aritmetica

TEOREMA DELLA MEDIA → se $f \in \mathcal{C}[a;b]$ (⇒ integrabile)

$\exists c \in [a;b]$ $\quad f(c) = f_M \qquad f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$

DIMOSTRAZIONE → $f \in \mathcal{C}[a;b]$ ⇒ Weierstrass (esiste max assoluto e min assoluto)

$\forall x \in [a;b] \qquad m \leq f(x) \leq M \qquad \exists x_m, x_M \quad m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$

$$\int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx$$

→ l'integrale della costante é la costante per la lunghezza dell'intervallo.

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$ → divido per $b-a$

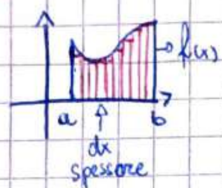
$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$ → teorema dei valori intermedi

$$\exists c : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

f integrabile su $[-a;a]$ se f pari $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

se f è dispari $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Significati geometrici → Area

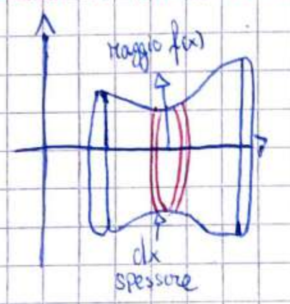


$f(x) \geq 0$ su $[a;b]$ $f(x) = h$, $dx = b$

$$\text{Area} = \int dA = \int_a^b f(x)\,dx$$

$dA = f(x)\,dx$

Solidi di rotazione → Volume



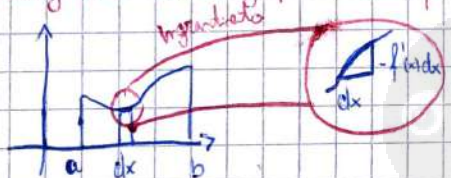
ruota intorno all'asse x $f(x)$ = raggio $dx = h$, spessore

$V = \pi r^2 h$

$dV = \pi (f(x))^2 dx$

$$V = \int dV = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Lunghezza linea grafico della funzione

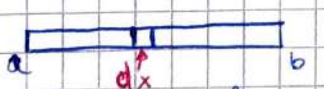


Ipotenusa triangolo rettangolo cateto 1 = dx
cateto 2 = $-f'(x)\,dx$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x))^2 dx^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

$$l = \int dl = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Massa di una sbarra



$\rightarrow dM = f(x) \cdot dx$

3gr cm, 5cm = 15 gr $f(x)$ = densità della massa

$$M = \int dM = \int_a^b f(x)\,dx \qquad x_B = \frac{1}{M}\int_a^b x f(x)\,dx$$ → ascissa del baricentro (centro di massa)

Primitiva

Definizione: la funzione F derivabile in $[a;b]$ è detta primitiva della f se

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;b]$$

Se conosciamo una primitiva F di f su $[a;b]$, tutte le altre primitive sono della forma $F(x) + c$
← costante (derivata di una costante è = 0)

$\Rightarrow$ se F è una primitiva anche $F'(x) + c$ lo è

$\Leftarrow$ se F_1 e F_2 sono due primitive di f, allora $F_1' - F_2' \Rightarrow f - f = 0$

$(F_1 - F_2)' = 0 \Rightarrow$ allora $F_1 - F_2 = c$
← se la derivata è 0 in ogni punto, allora la f è una costante

- Se f ha una discontinuità a salto $c \in [a;b] \Rightarrow f$ non ha la primitiva (anche se è integrabile)

TEOREMA → se $f \in \mathcal{C}[a;b] \Rightarrow \exists$ primitiva di f

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE 1

- Sia $f \in \mathcal{C}[a;b]$, F è una primitiva

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

sommo e sottraggo fino a x_1

DIMOSTRAZIONE → $F(b) - F(a) = F(x_m) - F(x_0) \Rightarrow F(x_m) - F(x_{m-1}) + F(x_{m-1}) - \dots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$

$$= \sum_{j=1}^{m} F(x_j) - F(x_{j-1}) \; *$$

Se $g \in \mathcal{C}[c,d]$ e derivabile in (c,d), vale il teorema di Lagrange, $\exists \tau \in (c,d) : g'(\tau) = \dfrac{g(d)-g(c)}{d-c}$

$\Rightarrow g(d) - g(c) = g'(\tau)\cdot(d-c)$

$* = \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)(x_j - x_{j-1})$ per una opportuna scelta dei valori τ_j, $F(b) - F(a) = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)(x_j - x_{j-1})}_{\text{Somma di Cauchy RIEMANN}} \xrightarrow{m \to \infty} \int_a^b f(x)dx$

passando al limite otteniamo l'integrale.

INTEGRALE INDEFINITO $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ Es. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$\int_a^b f(x)dx =$ risultato è un numero.

Tutte le funzioni continue → sono integrabili e hanno la primitiva $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Di alcune funzioni non sappiamo scrivere la primitiva.

$f(x) = e^{-x^2}$ $\int_a^b e^{-x^2} dx$ (non sappiamo scrivere la primitiva)

METODI DI INTEGRAZIONE • integrali immediati (leggendo la tabella delle derivate da destra a sinistra + c)

$$\int \left(x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \ln|x| + c$$

INTEGRAZIONE PER PARTI → Trasformo l'integrale di un prodotto, in modo da riuscire a calcolarlo. Lo applico finché non sparisce la x

Teorema → se F e G sono primitive di f e g su $[a;b]$

$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = \Big[F(x)\,G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx$$

$\int fg\,dx = \int f'g\,dx + \int f\cdot g'\,dx$

→ integrali indefiniti $\int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,dx$

DIMOSTRAZIONE → derivata del prodotto, dal punto di vista delle primitive

$$\Big[\underbrace{F(x)G(x)}_{1}\Big]' = \underbrace{f(x)G(x) + F(x)g(x)}_{2}$$

1 è la primitiva della 2

$$\int_a^b \big(f(x)G(x) + F(x)g(x)\big)dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx$$

abbiamo la Tesi

lo sposto

Es: $\int \underbrace{x}_{F}\,\underbrace{\cos x}_{g}\,dx = \underbrace{x}_{F}\,\underbrace{\sin x}_{G} - \int \underbrace{1}_{f}\,\underbrace{\sin x}_{G}\,dx = x\sin x + \cos x + c$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

TEOREMA → $f \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ φ invertibile e derivabile in $[a, b]$

φ' è integrabile in $[a, b]$

$\tau = \varphi(t) \quad \alpha = \varphi(a) \quad \beta = \varphi(b)$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(\tau)\, d\tau$$

INTEGRALE INDEFINITO → $\displaystyle\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int f(\tau)\, d\tau \Big|_{\tau = \varphi(t)}$

DIMOSTRAZIONE → f continua, F primitiva

$$\int_\alpha^\beta f(\tau)\, d\tau = F(\beta) - F(\alpha) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$$\frac{d}{dt}\left[F(\varphi(t))\right] = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \Big[F(\varphi(t))\Big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$ TESI

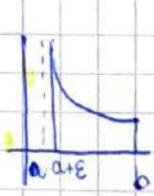
Es: $\displaystyle\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\, dx \to \int \frac{1}{\cos^2 e^x} \underbrace{e^x\, dx}_{du}$ $\quad e^x = u \to$ derivata $e^x dx = du$ $\quad \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 u}\, du = \tan u + c \to \tan e^x + c$

INTEGRALI IMPROPRI

- $[a, b]$ limitato f limitata

Se l'intervallo o la funzione è limitata, si parla di integrali impropri.

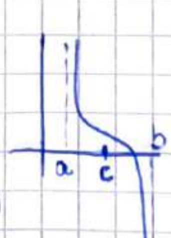
$f \in \mathcal{C}(a; b]$ $\quad \displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ $\quad a$ è un asintoto verticale



$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx$$

- $\exists$ finito $\to \int_a^b f(x)$ converge
- $\exists$ $\infty \to \int_a^b f(x)$ diverge
- $\nexists \to \int_a^b f(x)$ indeterminato

$f \in \mathcal{C}(a; b)$ $\quad \displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$



C'è il "problema" sia in a che in b

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Si spezza l'integrale prendendo un punto c nell'intervallo

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^c f + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_c^{b-\varepsilon} f$$

$\int_a^b$ converge solo se convergono $\int_a^c$ e $\int_c^b$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \begin{cases} \alpha \geq 1 & \text{diverge} \\ \alpha < 1 & \text{converge} \quad \dfrac{1}{\alpha - 1} \end{cases}}$$

Stabilire se converge: CRITERIO DEL CONFRONTO

f e $g \in \mathscr{C}(a;b]$ e $f,g \xrightarrow{x \to a} +\infty$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ (Vanno all'infinito con due velocità diverse)

$$\int_a^b g \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f \text{ convergerà}$$

$$\int_a^b f \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b g \text{ divergerà}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$f,g \in \mathscr{C}(a,b]$ $f,g > 0$ $f,g \xrightarrow{x \to a^+} +\infty$ $f(x) \overset{x \to a}{\sim} g(x)$

$$= \int_a^b f \text{ converge} \iff \int_a^b g \text{ converge}$$

Se $f \in \mathscr{C}(a,b]$, f cambia segno per $x \to a^+$

Se $\int_a^b |f(x)|$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)$ converge (NON viceversa)

Es.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x^2}\, dx \to 0 \leq \underbrace{\left|\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x^2}\right|}_{\text{confronto, converge}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow \alpha^{\frac{1}{2}} \to \text{converge}$$

f limitata $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx$
- $\to \exists$ finito $\to$ converge
- $\to \exists\ \infty \to$ diverge
- $\to \nexists \to \int_a^b f(x) =$ indeterminato

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\, dx = \begin{cases} \beta > 1 \text{ converge} \\ \beta \leq 1 \text{ diverge} \end{cases} \quad \frac{1}{\beta - 1}}$$ *

Se $f \in \mathscr{C}(-\infty; b]$ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^b f(x)\,dx$

Se $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^c f(x)\,dx + \lim_{R \to +\infty} \int_c^R f(x)\,dx$

Se entrambi gli integrali esistono finiti contemporaneamente (separatamente), allora converge.

CRITERIO CONFRONTO $f,g \in \mathscr{C}[a;+\infty)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a;+\infty)$

$$\int_a^{+\infty} g(x) \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) \text{ converge}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) \text{ diverge}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$f, g \in \mathcal{C}[a;+\infty)$ $f, g > 0$ $f \overset{x\to+\infty}{\sim} g$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge}$$

FUNZIONI INTEGRALI

Definizione* → f integrabile (proprio o improprio) su $I \subseteq \mathbb{R}$ → contenuto o coincidente

preso $x_0 \in I$ → si dice funzione integrale di f in I

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

2ª PARTE TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

- f e F come nella definizione* ⇒ abbiamo due Tes.

1) F é continua in I
2) Se f é continua in I, allora F é derivabile in I e $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$
   ↳ ogni funzione continua, ha una primitiva

DIMOSTRAZIONE ① → se f é integrabile ⇒ F é continua
(se é discontinua non ha la primitiva, ma basta spezzare l'intervallo e troviamo così l'integrale)

1A) Se f é integrabile in senso proprio ⇒ $f(x)$ é limitata, $|f(x)| \le M$

$$\forall \bar{x} \in I \quad |F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})| = \left|\int_{x_0}^{\bar{x}+h} f - \int_{x_0}^{\bar{x}} f\right| = \underbrace{\left|\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} |f|\,dt\right| \le \left|\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} M\,dt\right|}$$

$$= M|h| \xrightarrow{h\to 0} 0$$ continuità dimostrata

1B) Se f é integrabile in senso improprio ⇒ $f \to +\infty$ $x \to \bar{x}$ (asintoto verticale

$$\text{posto } b > \bar{x} \quad \int_{\bar{x}}^{b} f\,dt = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f\,dt + \underbrace{\int_{\bar{x}+h}^{b} f(t)\,dt}_{\xrightarrow{h\to0^+} \int_{\bar{x}}^{b} f} \Rightarrow \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt \xrightarrow{h\to0^+} 0$$

si annullano

continuità dimostrata

DIMOSTRAZIONE ② f continua ⇒ F derivabile, $\forall \bar{x} \in I$ $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

→ La derivata di F é f ←

f é continua, $h > 0$

rapporto incrementale $$\frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{\bar{x}+h} f - \int_{x_0}^{\bar{x}} f\right) = \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt = f(c_h)^*$$ → Teorema della media*

↳ continua per ipotesi

$$^* \exists c_h \in [\bar{x}; \bar{x}+h] : \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt = f(c_h)^*$$

$$\lim_{h\to0^+} \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to0^+} f(c_h) \quad \bar{x} < c_h < \bar{x}+h$$

↳ se $h \to 0$, $f(\bar{x})$ (derivata destra)

↓

ripetiamo lo stesso per $h \to 0^-$ e troviamo lo stesso valore $f(\bar{x})$ → quindi la derivata di $F(\bar{x})$ é $f(\bar{x})$

SERIE NUMERICHE → come si calcola la somma di infiniti numeri → serie

$a_1, a_2 \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

parziale → $S_K = \sum_{n=1}^{K} a_n$

$$\lim_{K \to +\infty} S_K \begin{cases} \exists \text{ finito} = S & \text{la } \Sigma \text{ converge} \\ \exists\ \infty = \pm\infty & \text{la } \Sigma \text{ diverge} \\ \nexists & \text{la serie è irregolare o oscillante} \end{cases}$$

Esempio: Σ convergente → serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots$$

$$* \quad S_K = \sum_{n=0}^{K} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^K = \begin{cases} K+1 & \text{se } q = 1 \\ 1/1-q & \text{se } q < 1 \\ \dfrac{1-q^{K+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \to |q| < 1$$

SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE Q

Se $q \neq 1 \to (1+q+q^2+\dots+q^K)(1-q) = 1-q^{K+1}$

$$\lim_{K \to +\infty} S_K \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \quad \text{diverge} \\ \dfrac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \quad \text{converge} \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \quad \text{non esiste} \end{cases}$$

$$* \quad S_K = \sum_{n=0}^{K} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^K = \begin{cases} K+1 & \text{se } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{K+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

Esempio 2 → SERIE DI MENGOLI, serie telescopiche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$

si semplificano i valori

$$S_K = \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{K} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{K+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

$$\lim_{K \to +\infty} S_K = 1 \quad \text{converge}$$

TEOREMA CONDIZIONE NECESSARIA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \Rightarrow a_n \to 0 \quad (\not\Leftarrow)$$

La condizione necessaria affinché una serie converga è che il termine generale a_n tenda a 0. Se gli a_n tendono a 0, non è detto che la serie converga

Esempio: SERIE ARMONICA

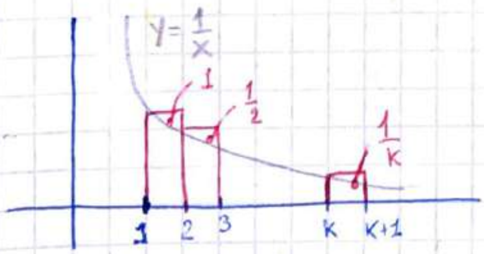
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad \text{diverge}$$

$$S_K = \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{K} \geq \int_1^{K+1} \frac{1}{x}\, dx$$

area rettangoli

$S_K \geq \ln(K+1)$ → Tende a $+\infty$ per $K \to +\infty$

divergerà per confronto



DIMOSTRAZIONE $\exists$ finito $\lim_{K \to +\infty} S_K = S \quad \lim_{K \to +\infty} S_{K+1} = S$ limite $= S$, un valore

$$\lim_{K \to +\infty} (S_{K+1} - S_K) = 0 \qquad \lim_{K \to +\infty} a_{K+1} = 0 \qquad \sum_{n=1}^{K+1} a_n - \sum_{n=1}^{K} a_n = a_{K+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

Se $a_n \not\to 0$ (non tende) $\Rightarrow \sum a_n$ non converge

SERIE A TERMINI POSITIVI ($a_n \geq 0$) o convergono o divergono

• PROPRIETÀ → una $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$ non può essere irregolare*

$(S_{k+1} = S_k + a_{k+1} \geq S_k : S_k$ è monotona) — Teorema monotonia

Es: $\sum \underbrace{(\cos n)^2}_{a_n}$ diverge (i singoli (a_n) oscillano tra 0 e 1, non la serie)

• $a_n \geq 0$, la serie è a termini positivi (non può essere irregolare)*
• $a_n \not\to 0$, la serie non converge

STABILIRE CONVERGENZA E DIVERGENZA

• **Criterio del confronto** $a_n, b_n \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad 0 \leq a_n \leq b_n \text{ per ogni}$$

- Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
- Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

DIMOSTRAZIONE → $A_K = \sum_{n=1}^{K} a_n \quad B_K = \sum_{n=1}^{K} b_n \quad A_K \leq B_K$ (sono monotone)

$$\lim A_K \leq \lim B_K$$

OSS. il criterio è valido anche se $a_n \leq b_n$ solo definitivamente

Es $\sum \frac{2+\cos n}{3n^2} \qquad \frac{2+\cos n}{3n^2} \leq \frac{3}{3n^2} = \frac{1}{n^2}$ converge $\alpha > 1$ per il criterio del confronto, converge anche la serie.

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO $\sum a_n, \sum b_n \quad a_n, b_n \geq 0 \quad a_n \sim b_n$

$\sum a_n \quad \sum b_n$ hanno lo stesso carattere (convergono o divergono entrambe)

DIMOSTRAZIONE $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\exists \bar{n} : \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow a_n < \frac{3}{2} b_n \quad a_n > \frac{1}{2} b_n \Rightarrow \frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$$

$\forall n \geq \bar{n}$ ↳ definitivamente

Se b_n converge, anche a_n converge
Se a_n diverge, anche b_n diverge

CRITERIO RAPPORTO $\sum a_n \ (a_n > 0)$

$$\boxed{\begin{aligned} a^{n+1} &= a^n a \\ (n+1)! &= n!\,(n+1) \end{aligned}}$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
- → $\nexists$ il criterio non si applica
- → >1 la serie diverge
- → $=1$? $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\sum \frac{1}{n^2}$ converge → il lim del rapporto è 1, ma non ci dà info sulla serie
- → <1 $\in [0,1)$ la serie converge

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1^+ \Rightarrow \sum$ **diverge**

DIMOSTRAZIONE $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1 \Rightarrow \sum$ converge

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon$$

$(\ell - \varepsilon) a_n < a_{n+1} < (\ell + \varepsilon) a_n$, scelgo ε t.c. $(\ell + \varepsilon) = \gamma < 1$, $\forall n \geq \bar{n}$ (definitivamente) $a_{n+1} < \gamma a_n$

$a_{\bar{n}+1} < \gamma a_{\bar{n}} \qquad a_{\bar{n}+2} < \gamma a_{\bar{n}+1} < \gamma^2 a_{\bar{n}} \qquad a_{\bar{n}+m} < \gamma^m a_{\bar{n}}$ — *converge per confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=1}^{\bar{n}-1} a_n + \sum_{n=\bar{n}}^{\infty}\right)^* = \text{un numero} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{\bar{n}+m} \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m a_{\bar{n}} = a_{\bar{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \to q < 1 \to \textbf{converge}$$

Es. CRITERIO RAPPORTO $\rightarrow \sum \left(\frac{n!}{n^n}\right) a_n$ $\quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}}$

$$= \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \rightarrow \text{converge}$$

CRITERIO DELLA RADICE

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$
- > 1 la $\sum$ diverge
- $= 1$? caso dubbio
- < 1 la $\sum$ converge

Se $\nexists \lim \sqrt[n]{a_n}$, ma $\lim\sup \sqrt[n]{a_n} < 1$ la serie converge

$\lim_{n \to +\infty} \sin n$ $\quad \lim\sup = 1$, $\lim\inf = -1$

Es: $\sum \underbrace{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}}_{a_n} \rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = \frac{1}{e^3} < 1$, la $\sum$ converge

---

$\sum a_n$ $\quad$ a_n ha segno qualsiasi

Definizione se il $\lim_{K \to +\infty} \sum_{n=1}^{K} a_n$ esiste finito, la serie converge semplicemente

se il $\lim_{K \to +\infty} \sum_{n=1}^{K} |a_n|$ esiste finito, la serie converge assolutamente

Teorema = Se $\sum a_n$ converge assolutamente $\rightarrow \sum a_n$ converge semplicemente

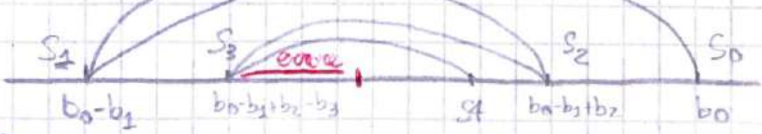
se $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

Es. $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ $\quad \sum \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ $\quad \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow$ converge anche la serie originale

SERIE A SEGNI ALTERNI (SERIE DI LEIBNIZ) $\quad$ Se $a < 0 \Rightarrow a = (-1)|a|$ (inverse)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \quad (b_n > 0)$$

Teorema di Leibniz $\rightarrow$ Se $b_n \rightarrow 0$, $\forall n \; b_{n+1} < b_n$ $\Rightarrow$
- $\sum (-1)^n b_n$ converge semplicemente
- $\left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n - \sum_{n=0}^{K} (-1)^n b_n\right| < b_{K+1}$



Es Leibniz $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ $\quad$ Soddisfa il teorema di Leibniz, converge semplicemente

$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n+1}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$ diverge $\quad$ converge semplicemente ma non assolutamente

Es 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{1}{n^3+n}}_{a_n}$ $\quad \sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^3+n}$ $\quad \frac{1}{n^3+n} \sim \frac{1}{n^3}$ $\quad \sum \frac{1}{n^3}$ converge

$\Rightarrow \sum (-1)^n \frac{1}{n^3+n}$ converge assolutamente e di conseguenza anche semplicemente

Determinare la somma con un valore $< 10^{-2}$ $\quad \underbrace{\left|\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+n} - \sum_{n=1}^{K} (-1)^n \frac{1}{n^3+n}\right|}_{\parallel \; < b_{K+1} < 10^{-2}} < 10^{-2}$ $\quad$ APPLICANDO LEIBNIZ

Es1 → CONTINUO ESERCIZIO $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3+n}-\sum_{n=1}^{K}(-1)^n\frac{1}{n^3+n}\right| < b_{K+1} < 10^{-2}$

$b_{K+1} = \frac{1}{(K+1)^3+(K+1)}$

$K=3$ $b_{K+1}=\frac{1}{68}$ NO

$K=4$ $b_{K+1}=b_5=\frac{1}{130}<10^{-2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\dots \simeq \sum_{n=1}^{4}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^3+n} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{1}{30}+\frac{1}{68} =$

$a_n>0$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{K}a_n = a_{K+1}+a_{K+2}+a_{K+3}+\dots$

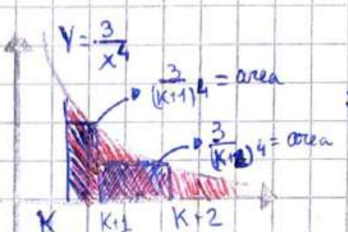
$> a_{K+1}$ (l'errore è maggiore del primo dei termini che troviamo)

E. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} \to \frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} < \frac{3}{n^4}$ $\sum\frac{3}{n^4}=3\sum\frac{1}{n^4}$ converge, quindi la serie converge

Determinare il valore con errore $<10^{-3}$

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}}-\sum_{n=1}^{K}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}}\right| = \sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} < \dots < 10^{-3}$

$\sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} < \sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{3}{n^4} = \frac{3}{(K+1)^4}+\frac{3}{(K+2)^4}+\dots$



$\le \int_K^{+\infty}\frac{3}{x^4}dx = \left.-\frac{1}{x^3}\right]_K^{+\infty} = \frac{1}{K^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}}-\sum_{n=1}^{K}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} < \frac{1}{K^3} \le 10^{-3}$ È vero se $K \ge 10$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}} \simeq \sum_{n=1}^{10}\frac{2+\sin n}{n^4+e^{-n}}$ l'errore sarà $<10^{-3}$

- PROPRIETÀ COMMUTATIVA
$a+b+c = c+b+a$

- In una $\sum$ convergente, se converge assolutamente, vale la proprietà commutativa
- Se la $\sum$ converge semplicemente ma non assolutamente, vale il Teorema di Riemann

TEOREMA DI RIEMANN-DINI

Data la $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge semplicemente ma non assolutamente, $\forall\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$ $\exists$ riordinamento degli a_n tale che la serie ordinata converga a λ → posso far convergere la serie a ciò che voglio

---

a_n segno qualsiasi $b_n \ge 0 \begin{cases} a_n & \text{se } a_n>0 \\ 0 & \text{se } a_n<0\end{cases}$ $c_n\le 0 \begin{cases} 0 & \text{se } a_n>0 \\ a_n & \text{se } a_n<0\end{cases}$

a_n positivi $= b_n$ a_n negativi $= c_n$

$\sum|a_n| = \underbrace{\sum b_n}_{\substack{\text{diverge}\\ +\infty}} + \underbrace{\sum -c_n}_{\substack{\text{diverge}\\ -(-\infty)}}$ diverge $\sum b_n=+\infty$

$\sum c_n = -\infty$

Esempio Riemann-Dini

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \ln 2 = S$ → converge semplicemente $\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$ → diverge assolutamente

$S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$

$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{8} \quad +\frac{1}{10} \quad -\frac{1}{12}$

3 termini

$S+\frac{S}{2} = \frac{3}{2}S = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\dots$

$\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2$

SERIE DI TAYLOR

$f \in C^m(D) \quad \forall x \in D$ $\quad f^{(k)}$ = derivata K-esima

$f \in C^\infty(D)$ ↳ dominio $\quad x_0 \in D$, $\exists (x_0-\delta; x_0+\delta)$ $\left|\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right| \leq M$ ← $\exists M, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0-\delta; x_0; +\delta)$

$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ definizione di esponenziale. $\quad e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} + o(x^k)$

Serie di potenze centrata in x_0 $\sum_{m=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^m$. Le serie di TAYLOR sono particolari serie di potenze

$a_n = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ $\quad \forall$ serie di potenze esiste un numero R (raggio di convergenza per il quale si sa che la serie di potenze converge in $(x_0-R; x_0+R)$

$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$; $Sh(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$; $Ch(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$; $\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$; $\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!}$

↓

R = +∞, Convergono $\forall x \in \mathbb{R}$

$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m}$ $\quad R = 1$ $\qquad$ converge per ogni $x \in$ all'intorno di 1
possiamo usarlo per $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$, ma non per $\ln(1+3)$

$(1+x)^\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} x^m$ $\quad R = 1$

$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{m=1}^{\infty} f_{(m)} x = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_m(x)$ $\quad$ Il limite della serie è uguale alla serie del limite

$\frac{d}{dx} \sum_{m=1}^{\infty} f_m x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(f_m x)$ $\quad$ La derivata della serie è uguale alla serie della derivata

$\int_a^b \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m x \, dx\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b f_m(x) \, dx$ $\quad$ L'integrale della serie è la serie dell'integrale

vale solo per la serie di TAYLOR → in generale vale solo per le Σ di potenze
se ci manteniamo all'interno dell'intorno $(x_0-R; x_0+R)$

$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q}$ $\quad |q| < 1$ $\qquad \forall x \in (-1; 1)$ $\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$ *

$\sum_{m=0}^{\infty} m x^m = \sum_{m=1}^{\infty} m x^m = x \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^m = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=1}^{\infty} x^m\right) = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m - 1\right)$ ↳ *
↳ con m = 0, vale 0 $\qquad$ Tolgo m = 0

$= x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = x \frac{1}{(1-x^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} m x^m = \frac{x}{(1-x)^2}$

Esempio $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ (NON POSSIAMO FARLO NORMALMENTE) $\quad e^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}$; $e^{-x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!}$

$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!}\right) dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \underbrace{\int_0^1 x^{2m} dx}_{\frac{1}{2m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(2m+1)}$

$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320}$

↳ l'errore è più piccolo di $\frac{1}{1320}$ (perché ci siamo fermati a m = 5 quindi l'errore è più piccolo dell'ultimo termine)