Tabella dei limiti

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x\to 0\ pos}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 1$	$\lim\limits_{x\to -1\ negat}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to -1\ pos}(1+x)^{\frac{1}{x}} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a \quad a>0$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\lambda}-1}{x} = \lambda$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\arccos x)^2}{1-x} = 2$
$\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\alpha}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \log_{\alpha}e$	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\log_{\alpha}(1+x)} = \dfrac{1}{\log_{\alpha}e}$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty}a^x = 0$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$

Tabella degli Asintotici (per x → 0) $\Rightarrow$ = *asintotico a..*

$\sin x \Rightarrow x$	$\sin x - x \Rightarrow \dfrac{x^3}{6}$
$e^x-1 \Rightarrow x$	$\ln(1+x) \Rightarrow x$
$\log_a(1+x) \Rightarrow \dfrac{x}{\ln a}$	$a^x-1 \Rightarrow x\ln a$
$(1+x)^k \Rightarrow 1+kx$	$\tanh x \Rightarrow x$
$1-\cos x \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}$	$\tan x \Rightarrow x$
$\sinh x \Rightarrow x$	$\arctan x \Rightarrow x$
$\cosh x - 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}$	$\arcsin x \Rightarrow x$
$x-\sin x \Rightarrow \dfrac{x^3}{6}$	

Forme indeterminate

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0\cdot\infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad +\infty-\infty$$

IRRAZIONALITÁ DI RADICE DI 2, $\sqrt{2}$. $\overline{P \Rightarrow Q} \iff P \wedge \overline{Q}$

- Dimostrazione per assurdo

La ~~rac~~ $\sqrt{2}$ non può essere espressa da una frazione in quanto numero irrazionale. → P
Supponiamo invece che la $\sqrt{2}$ possa essere espressa sotto forma di frazione → $\overline{P}$

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ dove $\frac{m}{n}$ é una frazione ridotta ai minimi termini (m ed n sono numeri naturali primi tra loro, quindi non possono essere entrambi pari.)

(2) $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2$

(3) $\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$ per cui m^2 é pari $\Rightarrow$ m é pari
poiché qualsiasi numero moltiplicato per 2, produce un numero pari, che si rappresenta come $m = 2K$

(4) Essendo m pari, allora può essere ottenuto moltiplicando per 2, un numero naturale K.

$m = 2K \quad m^2 = (2K)^2 \Rightarrow m^2 = 4 \cdot K^2$ Sostituiamo questo valore di m^2 nella (3)

(5) $4K^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2K^2$ questo indica che anche n^2 é pari $\Rightarrow$ n é pari

Avendo affermato che m e n fossero primi tra di loro, é impossibile che siano entrambi pari. ASSURDO.

NUMERABILITÁ DI Q → Q é numerabile? Sì

$$\begin{array}{ccccc} 0 & +1 & -1 & +2 & -2 \\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{2}{2} \\ \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}$$

$0, 1, \cancel{\frac{0}{2}}, -1, \frac{1}{2}, \cancel{\frac{0}{3}}, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$

Togliamo i doppioni

0	1	-1	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...	Q
0	1	2	3	4	5	6	...	N

Q ed N sono equipollenti, perché hanno la stessa cardinalità transfinita, possiamo metterli in corrispondenza biunivoca.

NON NUMERABILITÁ DI $\mathbb{R}$ → Dimostrazione → R é equipollente a $(0;1)$, dimostriamo per assurdo che $(0,1)$ non é numerabile. Se $(0;1)$ fosse numerabile, tutte le $x \in (0;1)$ dovrebbero poter essere elencate

Supponiamo di elencare tutte le $x \in (0;1)$

$x_0 = 0,71432\ldots$
$x_1 = 0,24169\ldots$
$x_2 = 0,30945\ldots$

Aggiungiamo 1 ad ogni cifra cerchiata $0,\overset{7+1}{8}\overset{4+1}{5}\overset{9+1}{0}\ldots$. Questo numero non é elencato e ciò vuol dire che non é possibile scrivere tutti i numeri nell'intervallo $(0;1)$

$\mathbb{R}$ é "più numeroso" di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ non é numerabile, ha la potenza del continuo come I, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ...
Lo corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$

PRODOTTO IN FORMA TRIGONOMETRICA $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

ρ e $r \to$ moduli

θ e $\alpha \to$ argomenti

$$z \cdot w = \rho r(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha))$$

DIMOSTRAZIONE $\to$ eseguiamo il prodotto termine a termine

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)] \cdot [r(\cos\alpha + i\sin\alpha)] =$$
$$= \rho r(\cos\theta\cos\alpha + i\cos\theta\sin\alpha + i\sin\theta\cos\alpha + i^2\sin\theta\sin\alpha =$$
$$= \rho r(\cos\theta\cos\alpha + i\cos\theta\sin\alpha + i\sin\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) =$$
$$= \rho r\underbrace{(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)}_{\text{coseno somma di due angoli}} + i\underbrace{(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha)}_{\text{seno somma di due angoli}} =$$

$$= \rho r(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha))$$

POTENZA E RADICE N-ESIMA DI UN NUMERO COMPLESSO

POTENZA $\to z^n = \rho^n(\cos(\theta n) + i\sin(\theta n))$

DIMOSTRAZIONE FORMULA DI DE MOIVRE $\to$ a partire dalla formula di Eulero $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

si applica la proprietà delle potenze $\to z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} \to \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$\rho = r \quad \vee \quad \theta = \alpha + 2k\pi$

RADICE IN FORMA TRIGONOMETRICA $\to \sqrt[n]{z} = w \iff w^n = z$

$$\rho^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$
$$\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

TEOREMA dato $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ $\quad n \geq 2 \quad n \in \mathbb{N}$ $\quad \exists_n : w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1}$ tali che $w_j^n = z$

Ogni numero complesso ha 2 radici quadrate, 3 radici terze, 4 radici quarte

DIMOSTRAZIONE $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad |w_j| = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|z|}$

argomento $(w_j) = \frac{\theta}{n} + \frac{2j\pi}{n}$ $\quad 0 \leq j \leq n-1$

Esempio $w = \sqrt[3]{-8}$

$\quad \hookrightarrow -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$

$r = \sqrt[3]{8} = 2$

$\alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \to k = 0, 1, 2 \to \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}$

$w_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$

$w_2 = 2(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi) = 1 - i\sqrt{3}$

TEOREMA DI MONOTONIA → Se è verificato, si dice che esiste il limite

Se $\{a_n\}$ è monotona e limitata, allora è convergente: $a_n \to L$

- Se $\{a_n\}$ è crescente, $L = \sup a_n$ (estremo superiore), $a_n \to L^-$ da sinistra
- Se $\{a_n\}$ è decrescente, $L = \inf a_n$ (estremo inferiore), $a_n \to L^+$ da destra

$a_n \nearrow L \; = a_n \to L^-$ Se a_n è crescente, $a_n \nearrow L$

$a_n \searrow L \; = a_n \to L^+$ Se a_n è decrescente, $a_n \searrow L^+$

Le relazioni non valgono al contrario

tende in maniera monotona

DIMOSTRAZIONE → $\{a_n\}$ è monotona crescente, $\{a_n\}$ è superiormente limitata $= \exists s$ che è $\sup\{a_n\}$

$s = \sup\{a_n\}$ è il più piccolo dei maggioranti: $\forall n : a_n \le s$

$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists a_{n^*} : s - \varepsilon < a_{n^*} < s$

quindi se $a_{n^*} > s - \varepsilon \quad \forall n \ge n^* \quad a_n \ge a_{n^*} > s - \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n^* : \forall n \ge n^* \; [s - \varepsilon < a_n \le s]$ definizione di limite

equivale a

$a_n \to s^-$

COROLLARIO → Se $\{a_n\}$ è crescente $\Rightarrow \exists \lim a_n = \sup\{a_n\}$. Se $\{a_n\}$ è LIMITATA, si ha il teorema

Se non è SUPERIORMENTE LIMITATA $\sup\{a_n\} = +\infty$

$\hookrightarrow \forall K > 0 \; \exists n^* : a_{n^*} > K \quad \forall n \ge n^* \quad a_n \ge a_{n^*} > K$

definitivamente $a_n > K$

Se è decrescente e non è INFERIORMENTE LIMITATA definitivamente $a_n < -K$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE → $\{a_n\}$ è convergente $\lim \to L$, allora il suo limite è unico

DIMOSTRAZIONE $a_n \to L_1$, $a_n \to L_2$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon : \forall n \ge n_\varepsilon \; |a_n - L_1| < \varepsilon$ e $|a_n - L_2| < \varepsilon$

$|L_1 - L_2| = \underbrace{|L_1 - a_n + a_n - L_2|}_{\text{aggiungo e sottraggo } a_n} \le \underbrace{|L_1 - a_n| + |a_n - L_2|}_{\text{definizione valore assoluto}} < 2\varepsilon$

$0 \le |L_1 - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow L_1 - L_2 = 0$ ← (i due limiti coincidono)

0 è l'unico numero più piccolo di ogni altro numero naturale

ALGEBRA DEI LIMITI → $a_n \xrightarrow{\text{Tende}} a \in \mathbb{R}$, $b_n \xrightarrow{\text{Tende}} b \in \mathbb{R}$ (a e b sono limiti) (a_n e b_n sono le successioni)

SOMMA $(a_n \pm b_n) \xrightarrow{\text{Tende}} (a \pm b)$ → DIMOSTRAZIONE $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$

PRODOTTO $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow{\text{Tende}} (a \cdot b)$ → DIMOSTRAZIONE $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente ($\exists n_\varepsilon : \forall n \ge n_\varepsilon$) $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$

$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n \underbrace{- a \cdot b_n + a \cdot b_n}_{\text{sommo e sottraggo } a \cdot b_n \text{ in } \dots} - a \cdot b| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)|$

$|b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \le \underbrace{|b_n|}_{< |b| + \varepsilon} \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon} + |a| \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{< \varepsilon} \le \varepsilon(|b| + \varepsilon + |a|)$

Prodotto delle succ. tende ad (ab) → $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \le \varepsilon(|b| + \varepsilon + |a|)$

↳ piccola quanto voglio

DIVISIONE $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$ ↳ $b_n, b \ne 0$

POTENZA $\left(a_n^{b_n} \to a^b \quad a_n, a > 0\right)$

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO → data $\{a_n\} \xrightarrow{\text{Tende}} a$ (numero finito $a \in \mathbb{R}$)

TESI 1 → Se $a > 0 \vee (a < 0)$ allora definitivamente $a_n > 0 \vee (a_n < 0)$

Se il limite é positivo o negativo, " "$\{a_n\}$ é positiva o negativa.

TESI 2 → Se $a_n \geq 0 \vee (a_n \leq 0)$ allora definitivamente $a \geq 0 \vee (a \leq 0)$

DIMOSTRAZIONE 1 $\forall \varepsilon > 0$ $\underbrace{a - \varepsilon}_{>0} < a_n < a + \varepsilon$ definitivamente ($\exists m_\varepsilon : \forall m \geq m_\varepsilon$) ε lo scelgo in modo che $a - \varepsilon > 0$

$\Rightarrow 0 < a_n$ → DIMOSTRATO

DIMOSTRAZIONE 2 $a_n \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$ per assurdo ($P \Rightarrow Q \leftrightarrow \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$) Se $a < 0 \Rightarrow a_n < 0$

- $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$
- $a_n > 0 \Rightarrow a > 0$? NO $\quad a_n = \frac{1}{n} \to \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

↳ Si accumula verso 0 per eccesso (da destra)

TEOREMA DEL CONFRONTO → $\forall n$ $a_n \leq b_n \leq c_n$ Se abbiamo tre successioni e a_n e c_n tendono al limite L, allora anche b_n tende allo stesso limite

$a_n \to L,\ c_n \to L \Rightarrow b_n \to L$

DIMOSTRAZIONE $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad |a_n - L| < \varepsilon$

$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \quad |c_n - L| < \varepsilon$

$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon \to b_n \xrightarrow{\text{Tende}} L$

COROLLARI 1) $|b_n| \leq c_n$ definitivamente, $c_n \to 0 \Rightarrow b_n \to 0$

2) b_n é limitata, $c_n \to 0 \Rightarrow b_n \cdot c_n \to 0$

↳ esempio: $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$b_n = \sin n \cdot \frac{1}{n} = c_n \quad$ Tende a 0 c_n $\quad$ Tende a 0 c_n

LIMITI NOTEVOLI, DIMOSTRAZIONE

- $\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = 1 \quad \varepsilon_n \xrightarrow{\text{Tende}} 0 \quad \delta_n = \ln(1 - \varepsilon_n) \Rightarrow \varepsilon_n = e^{\delta_n} - 1 \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\delta_n}{e^{\delta_n} - 1} = 1$ (Tende a 0) $\quad \delta_n = \varepsilon_n \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{a_n} = 1$

- $\lim_{n \to \infty} \frac{(1 + \gamma_n)^\alpha - 1}{\gamma_n} = \alpha \quad z = (1 + \gamma_n)^\alpha - 1 \Rightarrow \log(1 + z) = \alpha \log(1 + \gamma_n) \quad z \xrightarrow{\text{Tende}} 0$

$\frac{(1 + \gamma_n)^\alpha - 1}{\gamma_n} = \frac{z}{\log(1 + z)} \cdot \frac{\log(1 + \gamma_n)}{\gamma_n} \alpha = \frac{(1 + \gamma_n)^\alpha - 1}{\log \underbrace{1 + (1 + \gamma)^\alpha - 1}_{z}} \cdot \frac{\log(1 + \gamma_n)}{\gamma_n} \alpha$

Poniamo $\alpha = 1$ $\quad \frac{1 + \gamma_n - 1}{\log 1 + 1 + \gamma_n - 1} \cdot \frac{\log 1 + \gamma_n}{\gamma_n} \cdot 1 = \frac{\gamma_n}{\log 1 + \gamma_n} \cdot \frac{\log 1 + \gamma_n}{\gamma_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_n} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_n} = 1$

- $\{\varepsilon_n\} \to 0 \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$

area triangolo esterno $\underbrace{\frac{1}{2} \sin \theta}_{} \leq \overbrace{\frac{1}{2} \theta}^{\text{Spicchio 1}} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \tan \theta}_{\text{Triangolo 1/e 2}}$

$\cos \varepsilon_n \leq \frac{\sin \varepsilon_n}{a_n} \leq 1$ $\quad$ per il teorema del confronto tende a 1 anche $\sin \varepsilon_n$.

$\varepsilon_n \to 0$ $\quad 1 \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad \cos \theta \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$

$\cos 0 = 1$

Successione

$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2}$ $\varepsilon_n \xrightarrow{\text{Tende}} 0$ $\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}\cdot\frac{1+\cos\varepsilon_n}{1+\cos\varepsilon_n} = \frac{1-\cos^2\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2(1+\cos\varepsilon_n)} = \frac{\sin^2\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2(1+\cos\varepsilon_n)} = \frac{1}{2}$

Trigonometria

Limite notevole che tende a 1

↳ tende a $1+\cos 0 = 2$ ($\varepsilon_n \to 0$)

TEOREMA DI CONTINUITÁ DELLA FUNZIONE COMPOSTA → Se g definita in $U(x_0)$ e continua in x_0, f definita in $U(\tau_0)$ e $(\tau_0 = g(x_0))$ f continua in τ_0, allora $f\circ g$ (f composto g) é definita almeno in $U(x_0)$ ed é continua in x_0.

DIMOSTRAZIONE → g continua in x_0 $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} g(x_0) = \tau_0$, usando il teorema di cambio di variabile nel limite $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{\tau\to\tau_0} f(\tau) = f(\tau_0) \Rightarrow f(g(x_0))$
↳ é continua

Esempio $f(x) = e^{\sin(x^2)}$ é continua perché x^2 é continua, sin é continua, $\sin x^2$ é continua, e $e^{\sin x^2}$ é continua.

TEOREMA DEGLI ZERI → $f \in C[a;b]$ → f é continua nell'intervallo chiuso $[a;b]$
- $f(a)\cdot f(b) < 0$ (hanno segni discordi) $\exists c \in [a;b]$ ove $f(c) = 0$

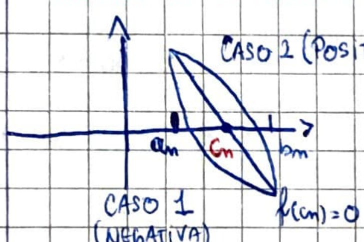
Se f é strettamente monotona, c é unico, poiché per la definizione un numero nell'intervallo $[a;b]$ é per forza negativo e di conseguenza c'é anche uno 0 nell'intervallo $[-1,2]$ → c'é 0 in mezzo.

- Una funzione C in $[a;b]$ con $f(a)\cdot f(b) < 0$ (segni discordi), $\exists$ un punto c dove $f(c) = 0$

DIMOSTRAZIONE → $a_0 = a$ $b_0 = b$ $(a_n, b_n) \mid f(a_n)\cdot f(b_n) < 0 \longrightarrow (a_{n+1}, b_{n+1}) \mid f(a_{n+1})\cdot f(b_{n+1}) < 0$

ALGORITMO → c_n é il punto medio dell'intervallo $\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ Se $f(c_n=0)$ STOP
(ABBIAMO LA TESI, IL PUNTO DOVE $f(c_n)=0$

METODO DI BISEZIONE -



Se la $f(c_n) = 0$, la funzione si annulla in quel punto

- Se $f(c_n) \neq 0$ allora: CASO 1 $\begin{cases} f(a_n)\cdot f(c_n) < 0 & a_{n+1} = a_n \\ f(c_n)\cdot f(b_n) > 0 & b_{n+1} = c_n \end{cases}$ Prendiamo la prima metá dell'intervallo, dall'inizio fino a c_n

- Se $f(c_n) \neq 0$ allora: CASO 2 $\begin{cases} f(a_n)\cdot f(c_n) > 0 & a_{n+1} = c_n \\ f(c_n)\cdot f(b_n) < 0 & b_{n+1} = b_n \end{cases}$ Prendiamo la seconda metá dell'intervallo, da c_n fino alla fine

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 1) a_n é crescente e limitata, b_n é crescente e limitata | TEOREMA DI MONOTONIA Esiste il limite $a_n \to L_1$, $b_n \to L_2$

2) $b_n - a_n = b-a/2^n$

3) $f(a_n)\cdot f(b_n)$ é sempre minore di $0 \Rightarrow f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$

f continua $f(a_n) \to f(L_1)$, $f(b_n) \to f(L_2)$ $(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{\text{Tende}} 0$

$b_n - a_n \longrightarrow L_2 - L_1$

$\Rightarrow L_2 - L_1 = 0 \Rightarrow L_2 = L_1$
↑ verificate contemporaneamente

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) f(b_n) < 0 = f(L_1)\cdot f(L_2) = \underset{\leq 0}{[f(L)]^2}$ l'unica possibilitá che un quadrato sia uguale a 0 é che $f(L) = 0$

TEOREMA DI WEIERSTRASS → $f: A \to \mathbb{R}$ • $f \in \mathcal{C}(A)$; • A é chiuso $[a;b]$; • A é limitato
$\exists x_m, x_M: f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \quad \forall x \in A$. In pratica la funzione ha il massimo assoluto e il minimo assoluto.

DIMOSTRAZIONE: $A = [a;b]$ mostriamo quindi che f ha il massimo $f(x) \le f(x_M)$. $S = \sup$ di $f(x)$ $x \in [a;b]$

← S deve essere estremo superiore in almeno uno dei due intervalli $[a;b]$

$\{b_n\}$ é limitata decrescente, $\{a_n\}$ é limitata crescente. In questo caso scegliamo l'intervallo come l'estremo superiore $= S$ $\forall n$ S = estremo superiore $f(x)$ $x \in [a_n; b_n]$
$a_n \longrightarrow x_0$, $b_n \longrightarrow x_0$ $\in [a;b]$. Siccome $a_n \le x_n \le b_n$

DIMOSTRIAMO PER ASSURDO CHE se $S = +\infty$ $\forall n \; \exists x_n \in [a_n; b_n]: f(x_n) > n$ (f NON é limitata superiormente)
per il teorema del confronto se $a_n \le x_n \le b_n$ e a_n e $b_n \to x_0$, allora anche $x_n \to x_0$ quindi $f(x_n) \to +\infty$, ma essendo f CONTINUA $f(x_n) \to f(x_0)$ (É ASSURDO PERCHÉ NON PUÓ TENDERE A VALORI DIVERSI)
- prendiamo quindi S = estremo sup = massimo (minimo dei maggioranti). Per la definizione
$\forall n \; \exists x_n \in [a_n; b_n]: S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S$ $\quad \frac{1}{n} = \varepsilon \xrightarrow{\text{tende}} 0$
$S - \frac{1}{n}$ tende $\to S$, $f(x_n)$ tende $\to f(x_0) = S$, S tende $\to S$
↳ perché f é CONTINUA
$f(x_0) = S$
$x_0 = x_M$ → punto dove la funzione assume il valore massimo assoluto

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (DARBOUX): Se una funzione é continua in un intervallo $[a;b]$ essa assume tutti i valori compresi nell'intervallo (tra minimo assoluto e massimo assoluto)
$f \in \mathcal{C}[a;b]$ $\quad m$ = minimo $f(x)$ con $x \in [a;b]$
$\quad M$ = massimo $f(x)$ con $x \in [a;b]$
$\forall \lambda (\in \mathbb{R}) \in (m, M) \; \exists x^* \in [a;b]: f(x^*) = \lambda$
↑ numero reale

DIMOSTRAZIONE → $\exists x_m: f(x_m) = m$, $\exists x_M: f(x_M) = M$. Prendiamo una nuova funzione $g(x) = f(x) - \lambda$ anche $g(x)$ é continua in $[a;b]$. Prendiamo ora I, l'intervallo chiuso con estremi x_m e x_M (pezzetto di $[a;b]$) $g(x_m) < 0$, $g(x_M) > 0$. $\underbrace{g(x_m) g(x_M) < 0}_{\text{(segni discordi)}} \Rightarrow \exists x^* \in I: g(x^*) = 0$
$\Rightarrow f(x^*) = \lambda$ $\; x^* \in [a;b]$ $\quad$ ↳ $m - \lambda < 0$ $\quad$ ↳ $M - \lambda > 0$

FUNZIONE INVERSA DI UNA FUNZIONE CONTINUA → I intervallo $f \in \mathcal{C}(I)$: f é invertibile $\Leftrightarrow$ f é strettamente monotona
FUNZIONE INVERTIBILE se ammette un'inversa $\Rightarrow f \Rightarrow \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{C}o\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ é invertibile se $g \Rightarrow co\mathcal{D}(f) \to \mathcal{D}(f)$
$(y = x^3 \xrightarrow{\text{INVERSA}} y = x^{1/3})$ $\quad$ ↳ deve essere biunivoca (corrispondenza 1 a 1 con gli elementi)
DIMOSTRAZIONE → che f é strettamente $\Rightarrow$ f é invertibile é ovvio (l'Im(f) comprende tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$)
f non monotona $\Rightarrow$ f non invertibile | → antinominale $P \Rightarrow Q \to \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
non monotona → $\exists x_0 < x_1 < x_2: f(x_0) < f(x_1) > f(x_2)$. Supponiamo che $f(x_0) > f(x_2)$. Una funzione non é invertibile se a due x corrisponde una y (NON È BIUNIVOCA). Considerato che se f é biunivoca é sia iniettiva che suriettiva, se f non é iniettiva, non é neanche invertibile.
• $\exists c \in (x_1, x_2)$ ove $f(c) = f(x_0)$
per il teorema dei valori intermedi

f non é iniettiva ⇒ non può essere invertibile
(non é monotona)

- **COROLLARIO** • Se $f \in \mathcal{C}(I)$, f é strettamente monotona $\Rightarrow f^{-1}$ é strettamente monotona e continua
(implica che ci sia l'inversa e che)

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO ⇒ Sia $g = f^{-1}$ g é strettamente monotona ed invertibile (in quanto inversa)
Se per assurdo g non é continua, essendo monotona, ha una discontinuità a salto, l'immagine di g quindi non é intervallo (c'é un buco)

↓ le ordinate che corrispondono al $\mathcal{D}f$ essendo $g = f^{-1}$
Dimostrata per assurdo → l'immagine di $g = I$. Dicendo che l'immagine di g quindi non é un intervallo, é come se dicessimo che un intervallo non é un intervallo

Se $f: (a;b) \Rightarrow \mathbb{R}$ (ha valori in) monotona, allora $\forall c \in (a;b)$ $\exists \lim_{x \to c^-} f$ $\lim_{x \to c^+} f$ | Se sono uguali é continua, altrimenti c'é una discontinuità a salto.

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ: Se f è continua, ma NON Derivabile

PUNTO ANGOLOSO/ANCORATO $\rightarrow \exists f'_+(x), \exists f'_-(x)$ sono diverse $\rightarrow x_0$ punto angoloso f Es $f(x)=|x|$

FLESSO A TANGENTE VERTICALE $\rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ (il limite non è finito) Es: $f(x)=\sqrt[3]{x}$

CUSPIDE $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{smallmatrix}+\infty\\(-\infty)\end{smallmatrix} \wedge \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{smallmatrix}-\infty\\(+\infty)\end{smallmatrix}$ Es $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

TEOREMA $f(a;b)\rightarrow\mathbb{R}$, se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0. NON VALE IL VICEVERSA

DIMOSTRAZIONE $\rightarrow h\to 0$, $f(x_0+h)-f(x_0) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h \overset{h\to 0}{\sim} f'(x_0)\cdot h$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = \lim_{h\to 0} f'(x_0)\cdot h = 0 \Rightarrow f(x_0+h) \xrightarrow{h\to 0} f(x_0) \text{ (funzione continua)}$$

OSSERVAZIONE $\rightarrow$ Se f è derivabile in x_0 $f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + o(h)$ perché $f\sim g \Leftrightarrow f=g+o(g)$
$\quad = f'(x_0)\cdot h + h\cdot o(1)$

ALGEBRA DELLE DERIVATE $\rightarrow f(a;b)\rightarrow\mathbb{R}$ derivabile in x_0

$[f\pm g]' = f'\pm g'$ $\rightarrow$ dimostrazione $\rightarrow \dfrac{f(x_0+h)\pm g(x_0+h)-[f(x_0)\pm g(x_0)]}{h} = \underbrace{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{Tende a } f'} \pm \underbrace{\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\text{Tende a } g'}$

$[f\cdot g]' = f'g+fg'$ $\rightarrow$ dimostrazione $\rightarrow \dfrac{1}{h}\{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)\} = \dfrac{1}{h}\{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)+$
$-f(x_0)g(x_0)\} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot \underbrace{g(x_0+h)}_{\text{Tende a } g} + f(x_0)\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \xrightarrow{\text{Tende}} f'g+fg'$

$\left[\dfrac{f}{g}\right]' \Rightarrow \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ $\rightarrow$ dimostrazione $\rightarrow \dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{g(x_0+h)}-\dfrac{1}{g(x_0)}\right\} = \dfrac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h\; g(x_0+h)\cdot g(x_0)} = \dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$\rightarrow \left[\dfrac{f}{g}\right]' = \left[f\cdot\dfrac{1}{g}\right]' = f'\cdot\dfrac{1}{g} - f\cdot\left(-\dfrac{g'}{g^2}\right) \Rightarrow \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

TEOREMA DI FERMAT $\rightarrow f(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ se $\left.\begin{array}{l}\cdot\ x_0 \text{ è un punto estremo locale}\\ \cdot\ f \text{ è derivabile in } x_0\text{, allora}\end{array}\right\} f'(x_0)=0$

DIMOSTRAZIONE $\rightarrow$ x_0 max locale $f(x)\le f(x_0)$

1ª ipotesi $\begin{cases}\text{Se } h>0 & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0 \rightarrow \text{per teor. permanenza segno} \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0 \Rightarrow f'_+(x_0)=0\\ \text{Se } h<0 & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge 0 \Rightarrow f'_-(x_0)=0\end{cases}$

Se f è derivabile, derivata destra e sinistra coincidono $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=0$
Se $f'(x_0)=0$, x_0 è un punto critico (dove si annulla la derivata). Una derivata può annullarsi anche negli estremi o dove non esiste la derivata. Se $f'(x_0)=0$, non implica che x_0 sia max o min.
Es $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$ la derivata in 0 vale 0, ma non ha max o min.

→ ci dice dove si annulla la funzione

TEOREMA LAGRANGE: $f \in \mathcal{C}[a;b]$ e derivabile in $(a;b) \Rightarrow \exists c \in (a;b): f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIMOSTRAZIONE: $W(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)\right]$

$W \in \mathcal{C}$ in $[a;b]$ ed è derivabile in $(a;b)$

$W(a) = W(b) = 0$ $\exists M, m$ max e min assoluto di W (perché l'intervallo è chiuso)

- Se $M = m$ $W(x) = cost$ $W(x) = 0$ $\forall x \Rightarrow W'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ $\forall x$
- Se $M > m$ nei due estremi la funzione ha lo stesso valore, uno dei due è interno $\rightarrow \bar{x}$
  - $\bar{x}$ è estremo assoluto (quindi locale)
  - f è derivabile in $\bar{x}$

  } TEOREMA FERMAT $\Rightarrow W'(\bar{x}) = 0$

$$W'(\bar{x}) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] = 0$$

$\bar{x} = c$ (punto dove si annulla la funzione)

CONSEGUENZA → TEST DI MONOTONIA → I intervallo $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in \mathcal{C}(I)$, f è derivabile in (I)
- f è crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ $\forall x$
- f è decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ $\forall x$

DIMOSTRAZIONE
- f è crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ dimostriamo che se f è crescente, $f'(x)$ è ≥ 0

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $h>0$ se f è crescente $f(x_0+h) > f(x_0)$ e quindi la frazione è positiva

$h<0$ se f è decrescente $f(x_0+h) < f(x_0)$ e quindi la frazione è positiva

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

dimostro che se $f'(x) \geq 0$ allora è crescente

$x_{1,2} \in I$ $x_1 < x_2$ $\exists c \in (x_1, x_2): \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

COROLLARIO: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ f è costante $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ $\forall x$

Esempio $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{composta}} = 0$ $\forall x$ $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$

La f per essere costante, deve essere definita in un intervallo, questa funzione è continua in ciascuno degli intervalli, ma ha costanti diverse.

TEOREMA DEL TAPPABUCHI: $f(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $(a;b)$ e derivabile in $(a;b)$, salvo al più $x_0 \in (a;b)$

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L \Rightarrow f$ è derivabile in x_0, $f'(x_0) = L$ → finito

DIMOSTRAZIONE → $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-(x_0)}$ → LAGRANGE $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0+\lambda h)$ $\lambda \in (0,1)$

$h \rightarrow 0 \Rightarrow x_0 + \lambda h \rightarrow x_0$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(x_0+\lambda h) = L$

Esempio: $f(x) = \begin{cases} \sin x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \left\{ \cos x + 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right.$

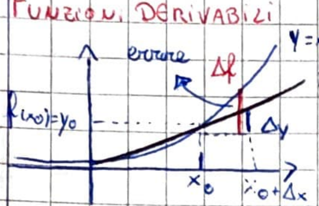
$f'(x) = \begin{cases} \cos x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(\cos x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) = \nexists$ perché non c'è $\lim \cos \frac{1}{x}$

È derivabile nell'origine? Usiamo il limite del rapporto incrementale applicato alla traccia

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)+f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h + h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h} + \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h}\right) = 1$$

È derivabile nell'origine ma non è continua, il fatto che f sia derivabile, non garantisce che sia continua

FUNZIONI DERIVABILI



f continua

$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ $\quad \Delta y = m\,\Delta x$

ERRORE $= \Delta f - \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - m\,\Delta x$

$\lim_{\Delta x \to 0} \text{errore} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f - \Delta y = 0$

Se Δx é un infinitesimo, allora anche l'errore é un infinitesimo

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{errore}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-m\Delta x}{\Delta x} - m$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\overbrace{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}^{\text{derivata}} - m = \underbrace{f'(x_0)-m}_{\text{se } f \text{ é derivabile in } x_0}$$

Se f é derivabile in x_0 • se m e' $\neq f'(x_0)$, l'errore e Δx sono infinitesimi dello stesso ordine

• Se $m = f'(x_0) \Rightarrow$ l'errore e' infinitesimo di ordine maggiore rispetto a Δx, errore $= o(\Delta x)$

Definizione $f(a;b)\to\mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in (a;b)$, se $\exists m$: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-m\Delta x}{\Delta x}=0$

esiste una retta tangente che lo approssima meglio delle altre.

TEOREMA f é differenziabile in $x_0 \iff$ f derivabile in x_0 se $\Delta x \to dx \Rightarrow \Delta f \simeq \Delta y$ $\quad df(x_0) = f'(x_0)\,dx$

Se f é derivabile in x_0, tra tutti i polinomi di primo grado $P_1(x) = mx+q$, l'approssimazione migliore la otteniamo se $\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) \to mx+q = f(x_0) \\ P_1'(x_0) = f'(x_0) \to m = f'(x_0)\end{cases}$ $\Rightarrow P_1(x) = f'(x)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$\frac{d^n}{dx^m} \Rightarrow \left.\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right|_{x=x_0} \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m\end{cases}$$

TEOREMA $\to$ data f, derivabile n volte in x_0 $\exists!$ polinomio $T_{n,x_0}(x)$, grado $\leq n$, che ha in comune $f(x)$ i valori di tutte le derivate fino all'ordine n in $x = x_0$

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

POLINOMIO DI TAYLOR $\to$ centrato in x_0, di grado n

tutti i coeff sono la derivata della funzione

$\to$ polinomio di grado n, centrato in x_0, di x

Se il polinomio di TAYLOR é centrato nell'origine $(x_0 = 0) \to$ POLINOMIO DI MAC LAURIN

$x_0 = 0$ $\quad T_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\cdot\frac{(x-0)^2}{2!} + \dots + f^n(0)\cdot\frac{(x-0)^n}{n!}$

RESTO SECONDO PEANO

SVILUPPO DI TAYLOR $\to f(x) = T_{n,x_0}(x) + \text{resto} \to$ Peano (descrizione qualitativa)

T: $f(a;b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a;b)$ allora $f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{o(x-x_0)^n}_{\text{resto}}$

Esempio $x_0 = 0$, $n=2$ $\quad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

DIMOSTRAZIONE: dobbiamo far vedere che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-f''(0)\frac{x^2}{2}}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{f'(x)-f'(0)-f''(0)x}^{o(x)}}{2x} = 0$$

f' é derivabile in 0, g derivabile in x_0 $\quad g(x_0+h)-g(x_0) = y'(x_0)h + o(h)$ ← definizione

$x_0 = 0$, $h = x$ $\quad g(x)-g(0) = g(0)\,x + o(x)$ $\quad g = f'(x)$ $\quad f'(x) - f'(0) = f''(0)x + o(x)$

RESTO SECONDO LAGRANGE $\to f(x) = T_{n,x_0}(x) + \text{resto} \to$ Lagrange (descrizione quantitativa)

$f:[a;b]\to\mathbb{R}$ f é derivabile n+1 volte in $[a;b]$, allora $\exists c$ tra x_0 e x $\quad f(x) = T_{n,x_0}(x) + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

derivata n+1 esima

DIMOSTRAZIONE: $x_0 = a$, $x = b$, $n = 1$ $\quad f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}$

$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = k(b-a)^2 \to$ deve essere $f''(c)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}$

$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - k(b-x)^2$ $\quad g(b) = 0$, $g(a) = 0$

sostituiamo la "a" con le x

se metto b al posto di x

Lo poiché k deve verificare l'uguaglianza

$\exists c : g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow g'(x) = \cancel{-f'(x)} + \cancel{f'(x)} - f''(x)(b-x) + 2k(b-x)$

$g'(c) = -f''(c)(b-c) + 2k(b-c) = 0 \Rightarrow k = \frac{f''(c)}{2}$

NON CONOSCEREMO MAI C, quindi non sapremo mai quanto vale l'errore.