STUDIO DI FUNZIONE

$f(x) = x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}}$

① Dominio $x \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

② Proprietà

$f(-x) = -x^2 e^{\frac{|x|-1}{-x}} = x^2 e^{\frac{|x|-1}{-x}}$ Non é simmetrica (nè pari, nè dispari)

③ Zeri e Segno

$f(x) = x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ non accettabile, non appartiene al dominio

$f(x) = x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}} > 0$ $\quad x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad f(x) > 0 \ \forall x \in D$

$e^{\frac{|x|-1}{x}} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

④ Limiti

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x^2 \underbrace{e^{\frac{x-1}{x}}}_{\to e} = +\infty$$

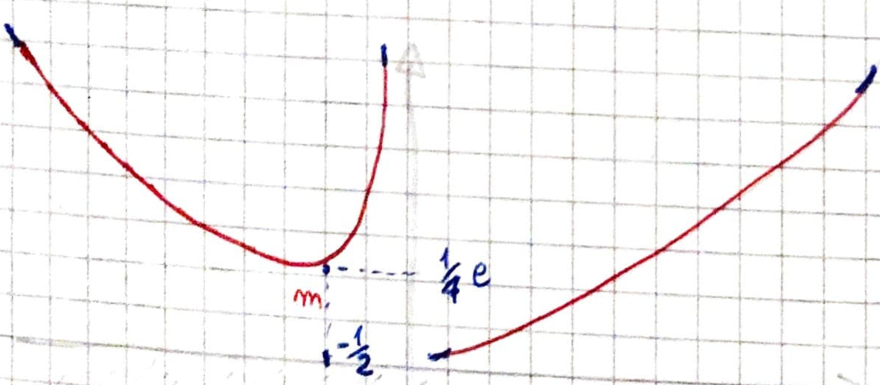
$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} x^2 \underbrace{e^{\frac{-x-1}{x}}}_{e^{-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} x^2 e^{\frac{x-1}{x}} = 0 \rightarrow (e^{-\infty} = 0)$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty \ \left(\frac{-1}{0}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}} = \lim_{x \to 0^-} x^2 e^{\frac{-x-1}{x}} = \text{FI } 0 \cdot \infty \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{-x-1}{x}}}{1/x^2} = +\infty$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{-x-1}{x} = +\infty$$



⑤ ASINTOTI OBLIQUI $\qquad x=0$ asintoto verticale (dal dominio) sinistro

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}e^{\frac{|x|-1}{x}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}x\,e^{\frac{x-1}{x}}=+\infty$$ (NON c'é asintoto obliquo)

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}x\,e^{-\frac{x-1}{x}}=-\infty$$ (NON C'É ASINTOTO OBLIQUO)

⑥ f é continua nel Dominio, prodotto di x^2 ed esponenziale, che sono entrambi funzioni continue, o composizioni di funzioni continue.

⑦ Derivabilitá

$$f(x)=x^2e^{\frac{|x|-1}{x}} \Rightarrow \begin{cases} x^2e^{\frac{x-1}{x}} & x>0 \\ x^2e^{-\frac{x-1}{x}} & x<0 \end{cases}$$

$$f'(x)=2x\,e^{\frac{x-1}{x}}+\cancel{x^2}e^{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{\cancel{x^2}} \qquad x>0$$
$$=e^{\frac{x-1}{x}}(2x+1)$$

$$f'(x)=2x\,e^{-\frac{x+1}{x}}+\cancel{x^2}e^{-\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{(-1)[\cancel{x}-\cancel{x}-1]}{\cancel{x^2}} \qquad x<0$$
$$=e^{-\frac{x+1}{x}}(2x+1)$$

Dominio di f' coincide con il Dominio di f

⑧ Punti di max e min (estremanti)

$f'(x)=0 \qquad e^{\frac{x-1}{x}}(2x+1)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ per $x>0$ NON ACCETTABILE

$e^{-\left(\frac{x+1}{x}\right)}(2x+1)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ per $x<0$ ACCETTABILE

⑨ Monotonia

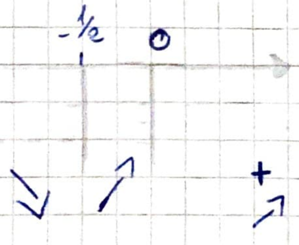
$f'(x)>0 \Downarrow f$ crescente

$f'(x)=\underbrace{e^{\frac{x-1}{x}}}_{>0}(2x+1)$ per $x>0$ $=2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$

f é crescente per $x>0$

$f'(x)=\underbrace{e^{-\frac{x+1}{x}}}_{>0}(2x+1)$ per $x<0 \Rightarrow 2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$

f é crescente per $x>-\frac{1}{2}$



minimo

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}e^{\frac{+\frac{1}{2}-1}{-1/2}}=\frac{1}{4}e^{1}$$

10) Derivata seconda

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x}}(2x+1) & x>0 \\ e^{-\frac{x+1}{x}}(2x+1) & x<0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x}} \frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{x^2} \cdot (2x+1) + e^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2 \\ e^{-\left(\frac{x+1}{x}\right)} \frac{(-1)[\cancel{x}-\cancel{x}-1]}{x^2} \cdot (2x+1) + e^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x}}\left[\frac{2x+1}{x^2}+2\right] = e^{\frac{x-1}{x}} \frac{2x^2+2x+1}{x^2} & x>0 \\ e^{-\left(\frac{x+1}{x}\right)}\left[\frac{2x+1}{x^2}+2\right] = e^{-\left(\frac{x+1}{x}\right)} \frac{2x^2+2x+1}{x^2} & x<0 \end{cases}$$

Dominio di $f'' = \mathcal{D} f' = \mathcal{D} f$

11) Flessi e concavità

$f''(x) = 0$ $\quad e^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{2x^2+2x+1}{x^2}\right) = 0$ $\quad x>0$, $x^2 \neq 0$ $\quad e^{\frac{x-1}{x}}$ non $\nexists = 0$

$$\underline{2x^2+2x+1 = 0}$$

$e^{-\left(\frac{x+1}{x}\right)}\left(\frac{2x^2+2x+1}{x^2}\right) = 0$ $\quad x<0$, $x^2 \neq 0$ $\quad e^{\frac{x-1}{x}} \nexists$

$$\underline{2x^2+2x+1 = 0}$$

$2x^2+2x+1 = 0$ $\quad \Delta < 0$ $\quad$ Non ci sono zeri.

$f''(x) > 0 \rightarrow 2x^2+2x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^{\frac{1}{|x|-2}}$

① Dominio $|x|-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$
$\forall x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

② Proprietà

$f(-x) = e^{\frac{1}{|-x|-2}} = e^{\frac{1}{|x|-2}} = f(x)$ é pari, simmetrico rispetto all'asse y
Studio solo la parte positiva

③ Zeri e segni

$f(x) = 0$ mai

$f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$

④ Calcolo dei limiti

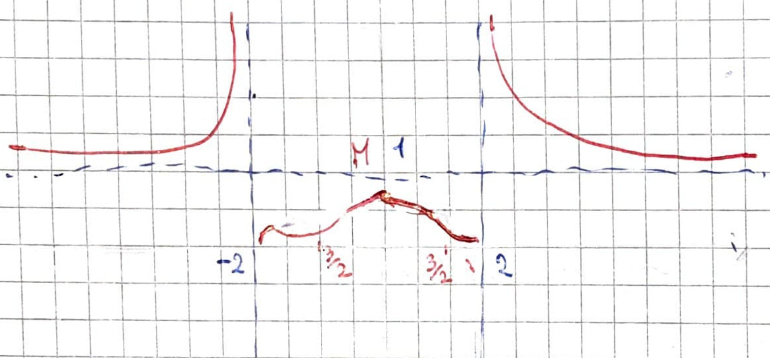
$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{|x|-2}} = 1$ $y = 1$ asintoto orizzontale anche per $x \to -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = 0 \quad (e^{-\infty})$

$\left(\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \right)$ Simmetria

$x = 2$, $x = -2$, asintoti verticali destro e sinistro.



⑤ f é continua, poiché é una composizione di una funzione continua.

⑥ Derivabilità

$f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ per $x \geq 0$

$f(x) = e^{\frac{1}{-x-2}}$ per $x < 0$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(\frac{-1}{(x-2)^2} \right)$ $x > 0$ $x \neq 2$

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x+2}} \left(\frac{1}{(x+2)^2} \right)$ $x \neq 0$ $x < 0$ $x \neq -2$

$D_{f'} = D_f - \{x = 0\}$

Studio la derivabilità in $x = 0$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{\frac{1}{|h|-2}} - e^{-1/2}}{h}$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{h-2}} - e^{-1/2}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-1/2} \left[e^{\frac{1}{h-2} (+\frac{1}{2})} - 1 \right]}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{2+h-2}{2(h-2)}} - 1 \right)}{h} =$

$$\lim_{h\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{h}{2(h-2)}}-1\right)^{\sim\frac{h}{2h-2}}}{h} = \lim_{h\to0^+} e^{-\frac{1}{2}}\,\frac{h}{2(h-2)}\cdot\frac{1}{h} = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$$ limite destro

$$\lim_{h\to0^-} \frac{e^{-1/2}\left[e^{\frac{1}{-h-2}+\frac{1}{2}}-1\right]}{h} = \lim_{h\to0^-} e^{-1/2}\left(\frac{e^{\frac{2-h-2}{-2(h+2)}}-1}{h}\right)$$

$$\lim_{h\to0^-} \frac{e^{-1/2}\left(e^{\frac{h}{2(h+2)}}-1\right)}{h} = \lim_{h\to0^-} e^{-1/2}\,\frac{\cancel{h}}{2(h+2)}\cdot\frac{1}{\cancel{h}} = +\frac{1}{4}e^{-1/2}$$

$x_0=0$ f non é derivabile in $x_0=0$ (limite destro e sinistro sono diversi) é un punto angoloso

7) Punti estremanti

$f'(x)=0$ $\quad f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) & x>0 \quad \text{mai} = 0 \\ e^{-\frac{1}{x+2}}\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)=0 & x<0 \quad \text{mai} = 0 \end{cases}$ per $x\in D f'$

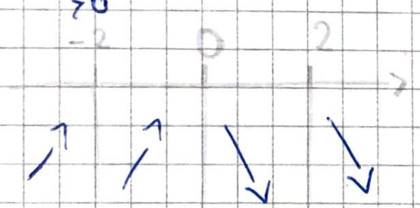
rimane $x_0=0$ possibile punto estremante

8) Monotonia

$f'(x)>0 \longleftrightarrow f$ crescente

$f'(x) = \underbrace{e^{\frac{1}{x-2}}}_{>0}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) < 0$ $\longrightarrow <0$ per $x>0$ $\quad$ per $x>0$ f é decrescente

$f'(x) = \underbrace{e^{-\frac{1}{x+2}}}_{>0}\underbrace{\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)}_{>0} > 0$ $\quad$ per $x<0$ f é crescente



$x_0=0$
massimo relativo

9) Derivata seconda

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)^2 \cancel{\left(\frac{}{(x-2)^4}\right)} + e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{(-1)(x-2)^{-3}}{\cancel{(x-2)^4}} = e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{2x-3}{(x-2)^4} \quad x>0$$

Dominio $f''(x) = D f'$

10) Flessi e concavitá

$f''(x)=0$ $\quad e^{1/x-2}\cdot\frac{2x-3}{(x-2)^4}=0$ per $x>0$ $\quad 2x-3=0 \Rightarrow x=3/2$ possibile flesso

$x=-3/2$ per simetria

$f''(x)>0$ $\quad \underbrace{e^{\frac{1}{x-2}}}_{>0}\cdot\frac{2x-3}{\underbrace{(x-2)^4}_{>0}}>0 \Rightarrow 2x-3>0 \quad x>3/2$

f é convessa per $x>3/2$