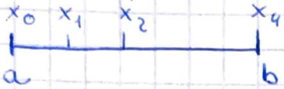
INTEGRALE

Definizione: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f$ limitata



$$h = \frac{b-a}{m} \qquad x_j = x_0 + jh$$

$$\tau_j \in [x_{j-1}, x_j] \qquad S_m = \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)(x_j - x_{j-1})$$

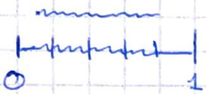
lunghezza dell'intervallo $(x_1 - x_0)$

SOMMA DI CAUCHY-RIEMANN

Si dice che $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ f limitata, é integrabile su $[a;b]$ se presa una qualsiasi successione $\{S_m\}$ (somme di Cauchy-Riemann), esiste finito il ~~limite~~ $\lim_{m \to \infty} S_m$

Se f é integrabile su $[a;b]$ $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m \to \infty} S_m$

Funzioni non integrabili $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \notin \mathbb{Q} \text{ non razionali} \end{cases}$ $\quad$ FUNZIONE DI DIRICHLET



$\tau_i \in \mathbb{Q} \ \forall i \quad S_m = 1$

$\tau_i \notin \mathbb{Q} \ \forall i \quad S_m = 0$

Teorema → Se $f \in \mathcal{C}[a;b] \Rightarrow$ é integrabile

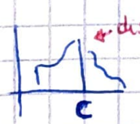
Teorema → Se f (limitata) è monotona, allora é integrabile.

Teorema → Se $[a;c]$, $[c;b]$ (l'intervallo $[a;b]$ é diviso in due pezzi).

Se f_1 é integrabile su $[a,c]$, f_2 é integrabile su $[c,b] \Rightarrow$

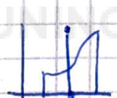
$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & a \le x < c \\ \dots & x = c \\ f_2(x) & c < x \le b \end{cases} \quad \text{é integrabile su } [a;b]$$

qualsiasi cosa

Es: 

é integrabile

Conseguenza: f integrabile su $[a;b]$



la rende discontinua in un punto

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ k & x = c \end{cases}$$

f^* é integrabile

$$\int_a^b f^*\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

L'integrale non é in grado di "sentire" cosa succede nei singoli punti

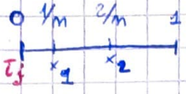
Conseguenza: Se $f \in \mathcal{C}(a,b)$, $\exists$ finiti $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x) \Rightarrow f$ é integrabile su $[a;b]$

Es: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad \displaystyle\int_1^{27} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\quad f \in \mathcal{C}[1;27]$ l'integrale esiste

$\exists \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$ $\quad f \in \mathcal{C}(0;1]$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\quad$ quindi la f é integrabile in $(0,1]$, anche se l'intervallo é aperto in 0

$f(x) = e^x \in \mathcal{C}[0;1] \Rightarrow$ integrabile

$$\int_0^1 e^x \, dx$$



$$\tau_j = x_{j-1} = \frac{j-1}{n}$$

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) \Rightarrow \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{\frac{j-1}{n}} \Rightarrow \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(e^{1/n}\right)^{j-1} \qquad \boxed{e^{1/n} = q}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} q^{j-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{n}\,\frac{1-\left(e^{1/n}\right)^n}{1-e^{1/n}} \Rightarrow \frac{1-0}{n}\cdot\frac{\left(1-e^{1/n}\right)^n}{1-e^{1/n}} = (1-e)\,\frac{1/n}{1-e^{1/n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1-e)\underbrace{\frac{1/n}{1-e^{1/n}}}_{-1 \text{ (tende a } -1)} = e-1$$

PROPRIETÀ INTEGRALI

① **LINEARITÀ** $\rightarrow$ f, g sono integrali su $[a;b] \Rightarrow (\alpha f(x) + \beta g(x))$ è integrabile su $[a;b]$

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx \pm \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE $\rightarrow$ $\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha f(\tau_j) + \beta g(\tau_j)\right) = \alpha\left(\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum f(\tau_j)\right) + \beta\left(\frac{b-a}{n}\sum g(\tau_j)\right)$

L'integrale della somma è la somma degli integrali

② **ADDITIVITÀ** $\rightarrow$ Se f è integrabile $[a;b]$ e $c \in (a;b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Se per convenzione $\int_b^a f = -\int_a^b f$ allora la formula vale anche se $c < a$ o $c > b$

③ **MONOTONIA** $\rightarrow$ Se f è integrabile su $[a;b]$ e $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a;b]$ allora

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Dimostrazione $S_n = \frac{b-a}{n}\sum f(\tau_j) \geq 0$ (ogni S_n è ≥ 0 (Teorema di permanenza del segno))

- **Conseguenza 1** $\rightarrow$ se f e g sono integrabili su $[a;b]$ e $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [a;b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx \qquad (f(x) - g(x)) \geq 0$$

- **Conseguenza 2** $\rightarrow$ f integrabile su $[a;b]$ $\quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\underbrace{-\int_a^b |f(x)|\,dx}_{-\square} \leq \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\star} \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{\square} \rightarrow |\star| \leq \square$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Il modulo della somma è ≤ della somma dei moduli

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$-3 \leq x \leq 3 \qquad |x| \leq 3$

Definizione: f integrabile su $[a,b]$, si chiama media integrale → definita per tutte le f integrabili

$$f_M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f_M = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \left(\frac{\cancel{b-a}}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\right)$$

la media integrale è la media ~~delle~~ aritmetica

TEOREMA DELLA MEDIA: Se $f \in \mathscr{C}[a;b]$ (⇒ integrabile)

$$\exists c \in [a;b] : f(c) = f_M$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE

↳ $f \in \mathscr{C}[a,b]$ ⇒ Weierstrass (esiste max assoluto e min assoluto)

$\forall x \in [a,b] \qquad m \leq f(x) \leq M \qquad \exists x_m, x_M : m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

↳ l'integrale della costante è la costante per la lunghezza dell'intervallo

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$ → divido per $b-a$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$ → per Teorema valori intermedi

$$\exists c : f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx$$

• f integrabile su $[-a;a]$ se f pari ⇒ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

se f dispari ⇒ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Significato geometrico → area

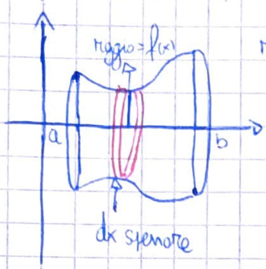
$f(x) \geq 0$ su $[a;b]$

$$\text{Area} = \int dA = \int_a^b f(x)\,dx$$

$dA = f(x)\,dx$

$f(x) = h$
$dx = b$

Solidi di rotazione, volume



ruota intorno all' asse x

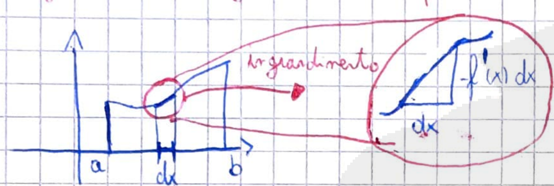
$V = \pi r^2 \cdot h$

$dV = \pi\, f(x)^2\,dx$

$$V = \int dV = \int_a^b \pi\,(f(x))^2\,dx$$

$f(x) =$ raggio $dx = h$, spessore

Lunghezza linea grafico della funzione

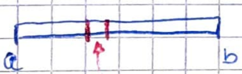


Ipotenusa triangolo rettangolo ~~di~~ cateto 1 $= dx$
cateto 2 $= f'(x)\,dx$

$dl = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x))^2\,dx^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$

$$L = \int dl = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

Massa di una sbarra



3 gr cm   5 cm = 15 gr $f(x) =$ densità di massa

dx → $dM = f(x) \cdot dx$

$$M = \int dM = \int_a^b f(x)\,dx$$

$x_B = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_a^b x\, f(x)\,dx$ → ascissa del baricentro
centro di massa

Definizione: la funzione F derivabile in $[a;b]$ è detta primitiva della f se

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;b]$

Se conosciamo una primitiva F di f su $[a,b]$, tutte le altre primitive sono della forma $F(x) + c$
c costante (derivata di una costante è = 0)

⇒ Se F è una primitiva anche ~~F~~ $F(x) + c$ lo è

⇐ se F_1 e F_2 sono due primitive di f, allora $F_1' - F_2' \Rightarrow f - f = 0$

$(F_1 - F_2)' = 0 \Rightarrow$ allora $F_1 - F_2 = c$
↑ se la derivata è 0 in ogni punto, allora la f è una costante

• Se f ha una discontinuità a salto $c \in [a,b] \Rightarrow f$ non ha la primitiva. (anche se è integrabile)

• Teorema: se $f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow \exists$ primitiva di f

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE 1

- Sia $f \in \mathcal{C}[a;b]$, F è una sua primitiva.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$