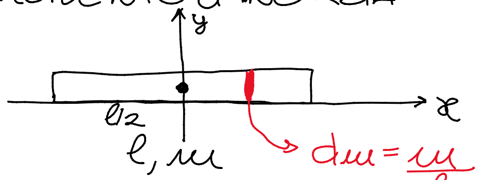
18/11/2020

mercoledì 18 novembre 2020 08:06

MOMENTO d'INERZIA



$I_o = \int dm\, x^2$

$dm = \frac{m}{l} \underbrace{dx}_{\text{spessore}}$

$$I = \int dm\, x^2 = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} dx\, x^2 = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$dx \to dm$

$\Rightarrow dm : dx = m : l \Rightarrow dm = \frac{m}{l} dx$

$$\frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{l}\,\frac{1}{3}\left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right] = \frac{1}{12} m l^2$$

$I = \frac{1}{2} m l^2$

Rispetto a un estremo:

$$I_A = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{1}{3}\frac{m}{l}(l^3 - 0) = \frac{1}{3} m l^2$$

$$I_o = \frac{1}{12} m l^2$$

tra i due cambia che I_o è più piccolo quindi far ruotare rispetto al centro è più facile

TEOREMA D

$$I_A = I_o + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

$I_A = m d^2 + I_{CM}$

CILINDRO:

m, h, R

MOMENTO ANGOLARE

$L = \int dL$

$L_{punto} = m v r =$

$= m \omega r^2$

$dL = dm\, \omega r^2$

$\rho dV = \rho dS h$ ↳ corona circolare

$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$

$$dL = \frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi R\, dr\, h\, \omega r^2$$

$\hookrightarrow$ corona circolare

$$dL = \frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi R\, dr\, h\, \omega r^2$$

$$L = \frac{2m}{R^2}\int r\, dr\, \omega r^2$$

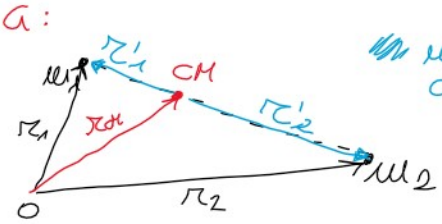
$$L = \frac{2m\omega}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m\omega}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m r^2 \omega$$

$\hookrightarrow I$

$\Rightarrow L_{TOT} = I\omega$ $\rightsquigarrow$ rispetto a un asse passante per CM

se non passasse per CM avrei un contributo in più

TEOREMI DI KÖNIG:



nel sistema di CM

$\bar{r}_1 = \bar{r}_{CM} + \bar{r}'_1$
$\bar{r}_2 = \bar{r}_{CM} + \bar{r}'_2$

$\vec{L}_i = \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$

$\bar{L}'_i = \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i$

$\bar{v}_i = \bar{v}'_{CM} + \bar{v}_{CM}$

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{N} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum (r_{CM} + r'_i) \times m_i (v_{CM} + v'_i) =$$

$$= \sum \underline{\bar{r}_{CM} \times m_i \bar{V}_{CM}} + \underline{\sum \bar{r}'_i \overset{m_i}{\times} \bar{V}_{CM}} + \sum \bar{r}_{CM} \times m_i \bar{V}'_i +$$

$$+ \underline{\sum \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i} =$$

$$= \underline{\bar{r}_{CM} \times m \bar{v}_{CM}} + \underline{\left(\sum m_i \bar{r}'_i\right) \times \bar{v}_{CM}} + \bar{r}_{CM} \times \sum m_i \bar{V}'_i +$$

$$+ \underline{\sum L'_i}$$

perché la sommatoria dipende solo da m_i che è la massa tot

secondo la stessa logica dipendono dalla sommatoria solo le componenti con la i in più posso portare m_i fuori vicino a r_i

corrisponde a L'_i

Sapendo che $m\bar{r}_{CM} = \sum \frac{m_i \bar{r}_i}{\cancel{m}} \cancel{m}$
$\quad \parallel$
$\quad 0$

posizione del CM rispetto a CM

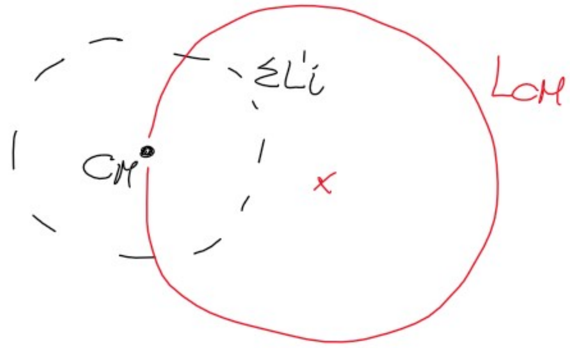
$m v_{CM} = \sum \frac{m_i v_i}{\cancel{m}} \cancel{m}$
$\quad \parallel$
$\quad 0$

velocità del CM rispetto a CM

$$\Rightarrow \bar{L} = \underline{\bar{r}_{CM} \times m \bar{v}_{CM}} + \cancel{\left(\sum m_i \bar{r}'_i\right) \times \bar{v}_{CM}} + \cancel{\bar{r}_{CM} \times \sum m_i \bar{V}'_i} +$$

$$+ \underline{\sum L'_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{L}} = \underbrace{\bar{r}_{CM} \times m \bar{v}_{CM}}_{L_{CM}} + \sum \bar{L}'_i = \boxed{\bar{L}_{CM} + \sum \bar{L}'_i}$$



SECONDO TEOREMA

$$E_K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\bar{v}_i^2 = \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i$$

$$(v'_i + v_{CM}) \cdot (v'_i + v_{CM})$$

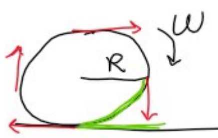
$$v'^2_i + 2 v_{CM} \cdot v'_i + v_{CM}^2$$

$$E_K = \sum \frac{1}{2} m_i v'^2_i + \sum \frac{1}{2} \cancel{m_i 2 v_{CM} \cdot v'_i} + \sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 =$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i v'^2_i + \underbrace{\frac{1}{2} m v_{CM}^2}_{E_{K\,CM}} = \boxed{\sum E'_K + E_{K,CM}}$$

$\sum m_i v'_i = 0$

$\Rightarrow E_K = E_K$ del CM + E'_K degli elementi che ruotano attorno al CM



$v = \omega R$

ROTOLAMENTO

sono uguali

$$E_K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$I \longrightarrow$ momento d'inerzia del disco rispetto CM

$$I = \frac{1}{2} m R^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{4} m \omega^2 R^2 = \frac{3}{4} m \omega^2 R^2$$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

$$\bar{R}^e = \frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt} \qquad \bar{M}^e = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

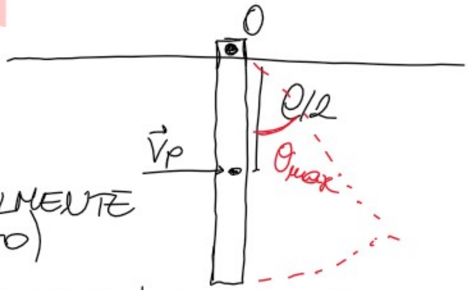
$\Rightarrow$ se $\bar{R}^e = 0 \Rightarrow \vec{P} = cost$ si conserva

se $\bar{M}^e = 0 \Rightarrow \bar{L} = cost$ si conserva

La conservazione dell'energia meccanica per un sistema di punti è garantita solo se forze esterne e interne sono conservative

La conservazione dell'energia meccanica per un sistema di punti è garantita solo se forze esterne e interne sono conservative

PENDOLO COMPOSTO



m, ℓ, v_p, m_p

$\theta_{max} = ?$

URTO ANELASTICO TOTALMENTE
(rimane conficcato)

reazione vincolare impulsiva in O
⇒ non si conserva $\vec p_{TOT}$

$\vec M_{F,O} = 0$ (momento delle forze esterne rispetto ad O)

⇒ $\vec L_{TOT}$ si conserva

$$L_{prima} = m_p v_p \underbrace{r \sin\alpha}_{} = m_p v_p \frac{\ell}{2}$$

distanza in cui il proiettile colpisce la sbarra

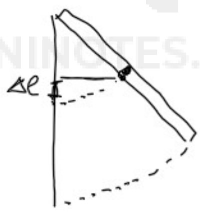
$$L_{dopo} = I_{sbarra,O}\,\omega + m_p \underbrace{\omega \frac{\ell}{2}}_{v'_p} \frac{\ell}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} m_s \ell^2 \omega + \frac{1}{4} m_p \ell^2 \omega = \left(\frac{1}{3} m_s + \frac{1}{4} m_p\right) \ell^2 \omega$$

$$\Rightarrow m_p v_p \frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{3} m_s + \frac{1}{4} m_p\right) \ell^2 \omega$$

$$\omega = \frac{m_p v_p \cdot 12}{2(4 m_s + m_p)\ell} = \frac{6 m_p v_p}{(4 m_s + m_p)\ell}$$

$$U = (m_s + m_p) g \frac{\ell}{2} (1 - \cos\theta_{max})$$



$$\Delta h = \frac{\ell}{2} (1 - \cos\theta_{max})$$

⇒ cons E_{TOT}

$$\frac{1}{2} I_{TOT,O}\, \omega^2 = \frac{\ell}{2} g (m_s + m_p)(1 - \cos\theta$$

↓

$$\frac{1}{2} m_s \ell^2 + m_p \left(\frac{\ell}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{3} m_s + \frac{1}{4} m_p\right) \ell^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_s + \frac{1}{4} m_p\right) \ell^2 = (m_s + m_p) \frac{\ell}{2} g (1 - \cos\theta)$$

$$1 - \cos\theta = \frac{\frac{4 m_s + 3 m_p}{12} \ell \omega^2}{(m_s + m_p) g}$$