GERARCHIA INFINITI = $\partial \log_a n < \partial n^\alpha < \partial a^n < \partial n! < \partial n^n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $\partial n! > \partial a^n$

FORMULA DI STIRLING = $n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{n\to+\infty} (1+ny)^{1/n} = e^n$ $y\to 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$ $y\to 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^y-1}{y} = \log a$ $y\to 0$
- $\varepsilon_n \to 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = 1$ $\varepsilon_n \xrightarrow{\text{tende}} 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\gamma_n)^\alpha - 1}{\gamma_n} = \alpha$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ $\varepsilon_n \xrightarrow{\text{tende}} 0$ $\Rightarrow \frac{\arcsin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ $\Rightarrow \frac{\operatorname{sh}\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2}$ $\varepsilon_n \xrightarrow{\text{tende}} 0$ $\Rightarrow \frac{1-\operatorname{ch}\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg}\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

ASINTOTICI:

$e^{\square} - 1 \sim \square$

$\sin\square \sim \square$

$1-\cos\square \sim \frac{\square^2}{2}$ $\cos\square - 1 \sim -\frac{\square^2}{2}$

$\ln(1+\square) \sim \square$

$(1+\square)^\alpha - 1 \sim \alpha\square$

$\tan\square \sim \square$ $\operatorname{arctg}\square \sim \square$

$A^B = e^{B\ln A}$

	$x\to\infty$	$x\to 0$	$x\to c$ $(1, \pi; 2\ldots)$
INFINITO CAMPIONE STANDARD	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-c}$
INFINITESIMO CAMPIONE STANDARD	$\frac{1}{x}$	x	$x-c$

SVILUPPI DI MAC LAURIN delle funzioni elementari Resto secondo PEANO

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\text{Ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ ← SOLO POTENZE PARI

$\text{Sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ ← SOLO POTENZE DISPARI

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ ← Chx con segni alternati

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ ← Sh x con segni alternati

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ ← Segni alterni, senza fattoriale

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$ ← Senza fattoriale, coeff. binomiale

$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

non si scrive $\alpha!$

Se $\alpha = -1$ $\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + \binom{1/2}{n} x^n + o(x^n)$

$\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8}$

$\cap$ intersecato $\Rightarrow$ AND appartiene ad A e a B contemporaneamente

$\cup$ unione $\Rightarrow$ OR insieme di tutti gli elementi di A e B

FORMULARIO ANALISI

DE MORGAN $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ è uguale a $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA $\Rightarrow$ riflessiva: ogni elemento è in relazione con se stesso.
Simmetrica: $a \sim b$ allora $b \sim a$
$\sim$ in relazione — Transitiva: $a \sim b$, $b \sim c$, $c \sim a$

ISOMORFO $\Rightarrow$ stesso comportamento

CAMPO $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ gode di alcune proprietà: somma e prodotto, commutativa, associativa, elemento neutro, reciproco opposto, (distributiva $m \cdot (n+l) = mn + ml$)

LOGICA $\Rightarrow$ $P \Rightarrow Q$ equivale a $\overline{P} \vee Q$ $\quad \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, $\overline{P \Rightarrow Q}$ equivale a $P \wedge \overline{Q}$

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO $\Rightarrow$ $P \Rightarrow Q$ equivale a $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
$P \Rightarrow Q$ equivale a $\overline{P} \vee Q$
$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$ (deve risultare falso con la dimostrazione)

CLASSI CONTIGUE $\Rightarrow$ $\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \le b$ e sono indefinitamente vicini ma non si toccano $\forall d > 0 \ \exists a^* \in A \wedge b^* \in B : b^* - a^* < d$
$[A, B]$ — τ è elemento separatore $a \le \tau \le b$
numero reale

Teorema $\Rightarrow$ $[A, B]$ ammette uno e un solo elemento separatore $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ è un insieme completo, $\mathbb{Q}$ no

SUPERIORMENTE LIMITATO $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ è superiormente limitato $\exists K \in \mathbb{R} : K \ge a \ \forall a \in A$ | limitato se è entrambi.

INFERIORMENTE LIMITATO $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ è inferiormente limitato $\exists h \in \mathbb{R} : h \le a \ \forall a \in A$

MAGGIORANTE $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ ~~è maggiorante se~~ $K \in \mathbb{R} : K \ge a \ \forall a \in A$

MINORANTE $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ si dice minorante se $h \in \mathbb{R} : h \le a \ \forall a \in A$

MAX $\Rightarrow$ sup lim $\Rightarrow$ $M_A \ge a \ \forall a \in A \quad M_A \in A$

MIN $\Rightarrow$ inf lim $\Rightarrow$ $m_A \le a \ \forall a \in A \quad m_A \in A$

ESTREMO SUPERIORE $\Rightarrow$ $K \in \mathbb{R}$ è $\sup A$ se $K = \text{minimo} \{x \in \mathbb{R} : x \ge a \ \forall a \in A\}$ minimo dei maggioranti

ESTREMO INFERIORE $\Rightarrow$ $K \in \mathbb{R}$ è $\inf A$ se $h = \max \{y \in \mathbb{R} : y \le a \ \forall a \in A\}$

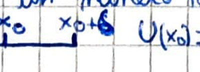
TEOREMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ ogni insieme superiormente limitato, ammette estremo superiore; ogni insieme inferiormente limitato, ammette estremo inferiore. Se esiste il max (min) di A, allora l'estremo superiore di A è uguale al massimo (minimo) di A. Se $\nexists$ max (min) allora sup A (inf A) $\exists$ all'esterno dell'insieme (inferiore) ($\pm\infty$)

INTERVALLO I $\Rightarrow$ è un sottoinsieme dei numeri reali formato da tutti i punti della retta reale che sono compresi tra due estremi a e b. Gli estremi possono (ma non devono necessariamente) appartenere all'intervallo e possono essere infiniti $(a; +\infty)$ $[a; b)$ ...

INTORNO U $\Rightarrow$ Dato un numero reale x_0, un intorno completo è un qualunque intervallo aperto contenente x_0
$x_0 - \delta \quad x_0 \quad x_0 + \delta$ — $U(x_0) : (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$ $\quad U_{sinistro} (x_0 - \delta, x_0]$ $\quad U_{destro} [x_0, x_0 + \delta)$

Punto interno $\Rightarrow$ $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ è interno se $\exists U(x_0) \subset A$ (intorno di x_0 all'interno di A)

Punto isolato $\Rightarrow$ x_0 è punto isolato di A se $\exists U(x_0) : U(x_0) \cap A = \{x_0\}$



$A = \{1\} \cup (2; 4]$ $\quad$ 1 è punto isolato, 2 è interno ad A, 5 è punto esterno.

Punto esterno $\Rightarrow$ x_0 è esterno ad A se $\exists U_{(x_0)} : U(x) \cap A = \emptyset$ (la loro intersezione genera l'insieme vuoto)

Punto di frontiera $\Rightarrow$ x_0 è di frontiera per A, se non è né interno né esterno. Gli estremi dell'insieme (1, 2 e 4)

Punto di accumulazione $\Rightarrow$ x_0 è punto di accumulazione se in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A (2, 3, 4 e $2 \le x \le 4$)

Parte interna $\mathring{A}$ l'insieme dei punti interni $\quad$ **Frontiera** ∂A l'insieme dei punti di frontiera

Chiusura $\overline{A} = A \cup \partial A$ $\Rightarrow$ l'unione di A con la sua frontiera $\quad$ **derivato di A** = A' insieme dei punti di accumulazione

TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS $\Rightarrow$ Sia $A \subset \mathbb{R}$ infinito e limitato, allora $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione (anche esterno)

COEFFICIENTE BINOMIALE $\Rightarrow$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\quad \binom{n}{1} = n$ $\quad \binom{5}{2} = 10$ $\quad 0! = 1$

BINOMIO DI NEWTON $\rightarrow (a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m+k)!} a^{m-k} b^k$ (Sviluppa le potenze con esponente intero e positivo)

insieme X finito $\rightarrow$ la cardinalità è il numero di elementi di X. Due insiemi sono **equipollenti** se hanno lo stesso numero di elementi. Due insiemi possono essere messi in corrispondenza biunivoca. Se X è **numerabile**, gli elementi formano una successione $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots x_m$

insieme infinito $\rightarrow$ Se l'insieme infinito X è **equipollente** (ha lo stesso valore) a $\mathbb{N}$, si dice che è numerabile
Cardinalità transfinita $\rightarrow$ quanto infinito è un insieme. La cardinalità transfinita di $\mathbb{N}$ e di ogni insieme equipollente (numerabile) è $\aleph_0$ (**aleph zero**).

DIMOSTRAZIONE CANTOR $\rightarrow$ $\mathbb{Q}$ è numerabile?

$$\begin{array}{ccccc} 0 & +1 & -1 & +2 & -2 \\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{+2}{3} & \frac{-2}{3} \end{array}$$

$0, 1, \cancel{\frac{0}{2}}, -1, \frac{1}{2}, \cancel{\frac{0}{3}}$

Togliamo i doppioni

$$\begin{array}{ccccc} 0, & 1, & -1, & \frac{1}{2} & \mathbb{Q} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \mathbb{N} \end{array}$$

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ sono equipollenti perché possiamo metterli in corrispondenza biunivoca e hanno la stessa cardinalità transfinita

NON NUMERABILITÀ DI $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ CANTOR $\rightarrow$ DIMOSTRAZIONE $\mathbb{R}$ è equipollente a $(0;1)$, dimostriamo per assurdo che $(0,1)$ non è numerabile. Se $(0;1)$ fosse numerabile tutte le $x \in (0,1)$ dovrebbero poter essere elencate

Supponiamo di elencare tutte le $x \in (0,1)$
$x_0 = 0,71432\dots$
$x_1 = 0,24169\dots$
$x_2 = 0,30945\dots$

aggiungiamo 1 ad ogni cifra cerchiata $\overset{7+1}{0,8}\overset{4+1}{5}\overset{9+1}{0}$. Questo nuovo numero non è elencato e ciò vuol dire che ~~nell~~ non è possibile scrivere tutti i numeri nell'intervallo $(0;1)$

$\mathbb{R}$ "è più numeroso" di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ non è numerabile e ha la potenza del continuo
$\mathbb{R}, I, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \rightarrow$ **hanno la potenza del continuo**
POTENZA DEL CONTINUO $\rightarrow$ è possibile determinare una corrispondenza biunivoca tra l'insieme scelto e l'insieme $\mathbb{R}$
INSIEME DISCRETO $\rightarrow$ è costituito solamente da punti isolati, ma ha almeno un punto di accumulazione $A = \{\frac{1}{n}\}$ $A' = 0$
INSIEME DENSO $\rightarrow$ Se ogni elemento dello spazio appartiene all'insieme o ne è un punto di accumulazione.
Es: $\mathbb{R}$ è un insieme denso, per ogni coppia di numeri vi è sempre un elemento dell'insieme compreso tra i due.
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ $\rightarrow$ Sono campi ORDINATI $\rightarrow$ presi due numeri reali, possiamo sempre dire se uno è maggiore dell'altro $x < y$

NUMERI COMPLESSI $\rightarrow$ Campo $\mathbb{C}$

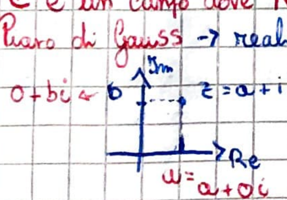
$i^2 = -1$ $\quad i^1 = i \mid i^2 = -1 \mid i^3 = -i \mid i^4 = 1 \mid$ $\quad z = a + ib$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a$ = parte reale $\quad b$ = parte immaginaria

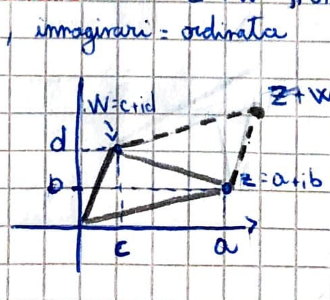
~~PRODOTTO~~ **SOMMA** $= z + w = (a+ib) \pm (c+id) = (a \pm c) \pm i(b+d)$ | elemento neutro $\Rightarrow 0 = 0 + i \cdot 0$
DIFFERENZA $= z - w = (a+ib) - (c+id) = (a-c) - i(b+d)$
PRODOTTO $= z \cdot w = (a+ib) \cdot (c+id) = ac + aid + ibc + \underbrace{i^2}_{-1} bd = (ac - bd) + i(ad + bc) \Rightarrow (1 + 0 \cdot i)$

DIVISIONE $= \frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac - iad) + (ibc - \overset{-1}{i^2} bd)}{c^2 - \underbrace{i^2}_{-1} d^2} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2 + d^2}$

RECIPROCO $\Rightarrow z = a + ib$ $\quad z^{-1} = \frac{1+0i}{a+ib} = \frac{1+0i}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ $\quad a^2 + b^2 \neq 0$ $\quad a^2 \neq 0$, $b^2 \neq 0$

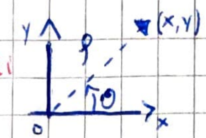
$\bar{z}$ = stessa parte reale, opposta parte immaginaria $z = a + ib$ $\quad \bar{z} = a - ib$
$\mathbb{C}$ è un campo dove NON c'è ordinamento $\rightarrow$ $z < w$ non ha senso.
Piano di Gauss $\rightarrow$ reali $\Rightarrow$ ascissa, immaginari = ordinata





Regola del parallelogramma.

PIANO CARTESIANO E COORDINATE POLARI



ϱ = rho
θ = Teta

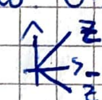
DA COORDINATE POLARI A COORDINATE CARTESIANE $\begin{cases} x = \varrho\cos\theta \\ y = \varrho\sin\theta \end{cases}$

DA COORDINATE CARTESIANE A POLARI $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$

CALCOLO DELL'ANGOLO θ $\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ se $x>0$; $\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + \pi$ se $x<0$; $\frac{\pi}{2}$ se $x=0 \wedge y>0$
$-\frac{\pi}{2}$ se $x=0 \wedge y<0$; indefinito se $x=y=0$

ALTRO METODO PER CALCOLO DI θ : $\begin{cases} x = \varrho\cos\theta \\ y = \varrho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\varrho} \\ \sin\theta = \frac{y}{\varrho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \arccos\frac{x}{\varrho} \\ \theta = \arcsin\frac{y}{\varrho} \end{cases}$

FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI = $\varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ ϱ = modulo θ = argomento
FORMA ALGEBRICA $z = a+ib$
$\bar{z}$ FORMA TRIGONOMETRICA $\to$ $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\bar{z} = \varrho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$



$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 \underbrace{-i^2}_{-(-1)=1} b = a^2+b^2$ $z\cdot\bar{z} = \varrho^2 = |z|^2$

$z = -1+\sqrt{3}\,i$ $\varrho = |z| = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ $\varrho\left(-\frac{1}{\varrho} + \frac{\sqrt{3}}{\varrho}i\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

PRODOTTO IN FORMA TRIGONOMETRICA $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ modulo = prodotto dei moduli
argomento = somma argomenti

$z \cdot w = \varrho r(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha))$

RAPPORTO IN FORMA TRIGONOMETRICA $\frac{z}{w} = \frac{\varrho}{r}(\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha))$

$z^n = \varrho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$z = w \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$ $z = w \Rightarrow \begin{cases} \varrho = r \\ \theta = \alpha + 2k\pi \end{cases}$ $\Rightarrow$ FORMA TRIGONOMETRICA

RADICI $w \in \mathbb{C} : w^n = z \to w = \sqrt[n]{z}$ in $\mathbb{R}$ $\sqrt{-4} = \nexists$ in $\mathbb{C}$ $\sqrt{-4} = \pm 2i$
TEOREMA = dato $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ $n \geq 2$ $n \in \mathbb{N}$
$\exists_n : w_0 + w_1 + w_2 + w_{n-1}$ tali che $w_j^n = z$
"Ogni numero complesso ha 2 radici quadrate, 3 radici terze, 4 radici quarte"
DIMOSTRAZIONE $\Rightarrow$ $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $|w_j| = \sqrt[n]{\varrho} = \sqrt[n]{|z|}$ argomento $(w_j) = \frac{\theta}{n} + \frac{2j\pi}{n}$ $0 \leq j \leq n-1$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA. In $\mathbb{C}$, l'equazione $a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = 0$ ha sempre n soluzioni.
$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 \cdot 1 = 0$ $a_k \in \mathbb{R}$ (tutti gli a_k sono numeri reali)
Se a_k sono tutti reali, allora se z è soluzione $\Rightarrow$ $\bar{z}$ è soluzione
Un'equazione in $\mathbb{C}$ a coefficienti reali possiede
- soluzioni reali $\to$ binomi di primo grado
- coppie di soluzioni complesse coniugate $\to$ trinomi con $\Delta < 0$

NUMERO COMPLESSO IN FORMA ESPONENZIALE $\to$ $z = \varrho e^{i\theta}$ $z \cdot w = \varrho r e^{i(\theta+\alpha)}$
FORMULE DI EULERO $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$ $\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = \sin\theta$

④

~~Ṝ~~
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (-\infty; +\infty)$
$U_{(+\infty)} = (a; +\infty)$

SUCCESSIONI

$\{a_n\}$ è una successione

SUPERIORMENTE LIMITATA → se $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \ \forall n$ (numero più grande di ogni elemento della successione)

INFERIORMENTE LIMITATA → se $\exists m \in \mathbb{R} : a_n \geq m \ \forall n$

LIMITATA → se è superiormente o inferiormente limitata $(-2)^n$

DEFINITIVAMENTE → si dice che $\{a_n\}$ soddisfa DEFINITIVAMENTE una certa proprietà se $\exists n^* : \forall n \geq n^*$ la $\{a_n\}$ soddisfa quella proprietà $\Rightarrow a_n = n - 100$ è definitivamente positiva, perché da $n = 101$, a_n è positiva.

LIMITE DELLA SUCCESSIONE → Si dice che $\{a_n\}$ tende al limite finito L se
$\forall \varepsilon > 0 \ \underbrace{\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon}_{\text{Definitivamente}} \ |a_n - L| < \varepsilon$
↳ $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ (def valore assoluto)

REGOLARE
- CONVERGENTE → se $a_n \xrightarrow{n \to \infty} L$ oppure $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$
- DIVERGENTE → se $a_n \xrightarrow{n \to \infty} \pm\infty$ oppure $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$

Si dice che $\{a_n\}$ Tende a $+\infty$ se $\forall K > 0 \ \underbrace{\exists n_K : \forall n \geq n_K}_{\text{Definitivamente}} \ a_n > K$ $\quad K \in \mathbb{R}$
↳ $a_n \in (K; +\infty)$

$\{a_n\}$ Tende a $-\infty$ se ~~[illegible]~~
$\forall K > 0 \ \underbrace{\exists n_K : \forall n \geq n_K}_{\text{Definitivamente}} \ a_n < -K$

IRREGOLARE → Se $\{a_n\}$ non è né convergente, né divergente, allora è irregolare $\Rightarrow$ Simm $-2^n, -1^n$, ...

SUCCESSIONE INFINITESIMA → Se $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ $\left(\frac{1}{n}\right)$

SUCCESSIONE INFINITA → Se $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$ (n^2)

DEFINIZIONE TOPOLOGICA DI LIMITE → Sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$ $a_n \xrightarrow{\text{Tende}} L$ se $\forall U(L)$ (intorno) definitivamente $a_n \in U(L)$

LIMITE PER ECCESSO → a_n tende ad L per eccesso $a_n \to L^+$ se $a_n \to L$ e $\forall a_n, a_n \geq L$
$\frac{1}{n} \to 0^+$ $\quad$ a_n si avvicina ad L da destra verso sinistra $L^+ \leftarrow +\infty$ ↙ decrescente

LIMITE PER DIFETTO → a_n tende ad L per difetto $a_n \to L^-$ se $a_n \to L$ e $\forall a_n, a_n \leq L$
a_n si avvicina ad L da sinistra verso destra $-\infty \to L^-$ ↗ crescente

MONOTONA → Se cresce o decresce (presenta sempre lo stesso andamento) in un intervallo.

MONOTONA CRESCENTE → $\{a_n\}$ è crescente se $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n$
$\{a_n\}$ è strettamente crescente se $a_{n+1} > a_n \ \forall n$
$\{a_n\}$ è non crescente se $a_{n+1} = a_n$

MONOTONA DECRESCENTE → $\{a_n\}$ è decrescente se $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n$
$\{a_n\}$ è strettamente decrescente se $a_{n+1} < a_n \ \forall n$
$\{a_n\}$ è non decrescente se $a_{n+1} = a_n$

DEFINITIVAMENTE CRESCENTE → da quel punto in poi è per sempre crescente.
$\exists n^* : \forall n \geq n^*$ $\quad$ 5, 4, 3, 2, 1, 0, −1, 0, 1, 2, 3, 4, n → da −1 in poi è definitivamente crescente

TEOREMA DI MONOTONIA → se è verificato, ci dice che esiste il limite. ~~[illegible]~~
Esistenza del limite ↑
Se $\{a_n\}$ ~~[illegible]~~: monotona, limitata, allora è convergente: $a_n \to L$
- Se $\{a_n\}$ è crescente $L = \sup a_n$ (estremo sup) $a_n \to L^-$ da sinistra
- Se $\{a_n\}$ è decrescente $L = \inf a_n$ (estremo inf) $a_n \to L^+$ da destra

Le relazioni non valgono al contrario
$a_n \nearrow L \Rightarrow a_n \to L^-$ = Se a_n è crescente $a_n \nearrow L$
$a_n \searrow L \Rightarrow a_n \to L^+$ = Se a_n è decrescente $a_n \searrow L$
$\{$ = Tende in maniera monotona

DIMOSTRAZIONE → a_n → monotona crescente, $\{a_n\}$ è superiormente limitata $= \exists S$ che è $\sup \{a_n\}$
$S = \sup \{a_n\}$ → è il più piccolo dei maggioranti: $\forall n : a_n \leq S$
↳ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_{n^*} : S - \varepsilon < a_{n^*} < S$
quindi se $a_{n^*} > S - \varepsilon$ $\quad \forall n \geq n^*$ $\quad a_n \geq a_{n^*} > S - \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n^* : \forall n \geq n^*$ $\quad S - \varepsilon < a_n \leq S$ | Definizione di limite
$=$
$a_n \to S^-$

COROLLARIO → verità conseguente da un'altra precedentemente dimostrata. Se $\{a_n\}$ crescente $\Rightarrow \exists \lim a_n = \sup \{a_n\}$
Se $\{a_n\}$ è LIMITATA, si ha il teorema
Se NON è SUPERIORMENTE LIMITATA $\quad \sup \{a_n\} = +\infty$
↳ $\forall K > 0 \ \exists n^* : a_{n^*} > K \quad \forall n \geq n^* \ a_n \geq a_{n^*} > K$
definitivamente $a_n > K$

STESSA COSA PER LE SUCCESSIONI DECRESCENTI $a_n < -K$

DIMOSTRAZIONE SUCCESSIONE DI NEPERO $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Per dimostrare che esiste il limite, dobbiamo dimostrare che é monotona e limitata

MONOTONA → $a_{n+1} > a_n \Rightarrow n=1 \quad \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 2 < \frac{9}{4} \Rightarrow \underline{2 < 2{,}25}$

↳ Oppure DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI $\underset{n \geq 2}{}$ → $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+1/n)^n}{(1+1/n-1)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \Big/ \frac{n-1}{n} = \frac{(1-1/n^2)^n}{1-1/n}$

per la disuguaglianza di Bernoulli $(1-1/n^2)^n > 1-1/n$ e quindi $a_n > a_{n-1}$

LIMITATA → dalla dimostrazione della monotonia, sappiamo che $a_1 = 2 < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, dunque $2 = \inf$

Sup = scriviamo la successione $a_n = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$ approssimandola

1) $a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{n!} = 2+\frac{1}{2!}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{3\cdot 4\cdot n}\right) \Rightarrow 2+\frac{1}{2}\left(\frac{1-(1/3)^{n-1}}{1-1/3}\right)$

2) $a_n < 2+\frac{3}{4} = 2{,}75 = \sup$

$2 < a_n < 2{,}75$

LIMITE SUCCESSIONE NEPERO $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ — se $a_n \xrightarrow{\text{tende}} +\infty$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

In generale $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ — Se $b_n \to -\infty$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$

Se c_n é irregolare $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e \Rightarrow \left(1+\frac{1}{-2^n}\right)^{-2^n} = e$

TEOREMA UNICITÁ DEL LIMITE → $\{a_n\}$ é convergente (il limite tende a 0) e allora il suo limite é unico

DIMOSTRAZIONE $a_n \to L_1,\ a_n \to L_2 \quad \forall \varepsilon > 0 \ \underbrace{\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon}_{\text{definitivamente}} \ |a_n - L_1| < \varepsilon$ e $|a_n - L_2| < \varepsilon$ il limite é unico

$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq \underbrace{|L_1 - a_n| + |a_n - L_2|}_{\text{definizione valore assoluto}} < 2\varepsilon$

$0 \leq |L_1 - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow L_1 - L_2 = 0$ → i due limiti coincidono (es. $4-4=0$)

↑ $= 0$ → (l'unico numero più piccolo di ogni altro numero naturale)

ALGEBRA DEI LIMITI → $a_n \xrightarrow{\text{tende}} a \in \mathbb{R}$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$ (a e b sono limiti) (a_n e b_n sono le successioni)

$(a_n \pm b_n) \xrightarrow{\text{tende}} (a \pm b)$ $(a_n \cdot b_n) \to ab$ $(a_n/b_n) \to a/b$ ($a_n^{b_n} \to a^b$ $a_n, a > 0$)

↑ $b_n, b \neq 0$

1ª DIMOSTRAZIONE → $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$

1) $|(a_n + b_n) - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$

↑ definizione valore assoluto $(|x+y| \leq |x| + |y|)$

2ª DIMOSTRAZIONE → $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente $(\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon)$ $|a_n - a| < \varepsilon$ $|b_n - b| < \varepsilon$

2) $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n \underbrace{- ab_n + ab_n}_{\text{sommo e sottraggo una stessa quantità: proprietà invariantiva}} - ab| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq \underbrace{|b_n|}_{<|b|+\varepsilon} \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} + |a| \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon}$

prodotto delle succ. Tende ad ab → $|a_n b_n - ab| \leq \varepsilon(|b| + \varepsilon + |a|)$ ε é piccola quanto voglio

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO → data $\{a_n\} \to a$ (numero finito $a \in \mathbb{R}$)

TESI 1. Se $a > 0 \lor (a < 0)$ allora definitivamente $a_n > 0 \lor (a_n < 0)$

Se il limite é positivo o negativo, allora " " a_n é positiva o negativa

TESI 2. Se $a_n \geq 0 \lor (a_n \leq 0)$ allora definitivamente $a \geq 0 \lor (a \leq 0)$

DIMOSTRAZIONE 1. $\forall \varepsilon > 0$ $\underbrace{a - \varepsilon}_{>0} < a_n < a + \varepsilon$ definitivamente $(\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon)$ ε lo scelgo in modo che $a - \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \underline{0 < a_n}$ dimostrato

DIMOSTRAZIONE 2. $a_n \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$ per assurdo $(P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ → Se $a < 0 \Rightarrow a_n < 0$

- $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$
- $a_n > 0 \Rightarrow a > 0$? NO $a_n = \frac{1}{n}$ → il $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

↑ si accumula verso 0 da destra, per eccesso

TEOREMA DEL CONFRONTO → $\forall n$ $a_n \le b_n \le c_n$ Se abbiamo tre successioni e a_n e c_n tendono al limite L, allora anche b_n deve tendere allo stesso limite

$a_n \to L$, $c_n \to L$ allora $b_n \to L$

DIMOSTRAZIONE $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$ $|a_n - L| < \varepsilon$

$L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon$

$L-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L+\varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$ $b_n \to L$

COROLLARI → 1) $|b_n| \le c_n$ definitivamente, $c_n \to 0 \Rightarrow b_n \to 0$

2) b_n limitata, $c_n \to 0 \Rightarrow b_n \cdot c_n \xrightarrow[\text{Tende}]{} 0$ Es: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$ Tende ↓ 0 Tende 0

TEOREMA DI ARITMETIZZAZIONE PARZIALE DI ∞ → ∞ é un simbolo, non un numero.

- $a_n \xrightarrow{\text{Tende}} a \in \mathbb{R}$ (numero finito), $b_n \to \pm\infty$ $a_n \pm b_n = \pm\infty$
- $a_n \to \pm\infty$, $b_n \to \pm\infty$ $a_n + b_n \to \pm\infty$
- $a_n \to a$ ($a \ne 0 \in \mathbb{R}$), $b_n \to \infty$ $a_n \cdot b_n \to \infty$ (regola dei segni $\pm$)
- $a_n \to a$ ($a \ne 0 \in \mathbb{R}$), $b_n \to 0^+$ $a_n/b_n \to \infty$ (regola dei segni $\pm$) $A/0 = \infty$
- $a_n \to a$ ($a \ne 0 \in \mathbb{R}$), $b_n \to \infty$ $a_n/b_n \to 0$ $A/\infty = 0$
- $a_n \to a$ ($a \in (1; +\infty)$), $b_n \to +\infty$ $a_n^{b_n} \to +\infty$ $A^\infty = \infty$
- $a_n \to a$ ($a \in [0;1)$), $b_n \to +\infty$ $a_n^{b_n} \to 0$ $0^\infty = 0$

FORME INDETERMINATE → $\infty - \infty$; ∞/∞; $0/0$; $0 \cdot \infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0

SUCCESSIONI CHE TENDONO A ∞ O A 0

- a_n e b_n sono infiniti $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$
  - 0 a_n é un infinito di ordine inferiore rispetto a b_n $\partial a_n < \partial b_n$
  - ∞ a_n é un infinito di ordine superiore rispetto a b_n $\partial a_n > \partial b_n$
  - $L \ne 0$ a_n e b_n sono infiniti dello stesso ordine $\partial a_n = \partial b_n$
  - $\nexists$ a_n e b_n sono infiniti non confrontabili
- a_n e b_n sono infinitesimi $\lim_{n\to 0} \frac{a_n}{b_n} =$
  - 0 a_n é un infinitesimo di ordine maggiore rispetto a b_n $\partial a_n > \partial b_n$
  - ∞ a_n é un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a b_n $\partial a_n < \partial b_n$
  - $L \ne 0$ a_n e b_n sono infinitesimi dello stesso ordine $\partial a_n = \partial b_n$
  - $\nexists$ a_n e b_n sono infiniti non confrontabili

INFINITO CAMPIONE STANDARD $= \{n\}$ la più semplice successione che tende a ∞

INFINITESIMO CAMPIONE STANDARD $= \{\frac{1}{n}\}$ la più semplice successione che tende a 0

Definizione $= \{a_n\}$ é infinito o infinitesimo, c_n e' l'infinito o infinitesimo campione standard.

SE esiste un valore $\alpha > 0$ tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n^\alpha} = L$ (numero finito e $\ne 0$), allora la successione a_n é un infinito o infinitesimo di ordine α rispetto a c_n

- a_n e b_n sono due infiniti o due infinitesimi. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ $a_n \sim b_n$ (la successione é asintotica a b_n)

"Si comporta come" $\sim$ ASINTOTICA → una successione a_n é asintotica a b_n se hanno lo stesso ordine e vanno verso

(vanno a ∞ con la stessa velocità) infinito con la stessa velocità $\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt[3]{4} \cdot n^{7/3} = 1$ $a_n \sim \sqrt[3]{4} \cdot n^{7/3}$. Il limite tende a 1

- a_n e b_n sono infiniti $= \partial a_n < \partial b_n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ $a_n = o(b_n)$ a_n é trascurabile rispetto a b_n

a_n e b_n sono infinitesimi $= \partial a_n > \partial b_n$

o TRASCURABILE → a_n é trascurabile rispetto a b_n, se il limite tende a 0. $a = o(b_n)$

$\sim$ RELAZIONE DI EQUIVALENZA → riflessiva $a_n \sim a_n$

↳ asintotica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ simmetrica $a_n \sim b_n$ allora $b_n \sim a_n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ anche $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

transitiva $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$

$a_n \sim b_n$ $c_n \sim d_n$ $a_n c_n \sim b_n d_n$ e $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$

~~TEOREMA DI GERARCHIA DEGLI INFINITI~~

PARTE INTERA → Si indica con $[x]$ e indica il più grande intero $\le$ del numero x $[\pi] = 3$

TEOREMA DI GERARCHIA DEGLI INFINITI → dimostriamo prima la seguente proprietà

$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ $\quad \forall x > 0,\ a > 1 \quad \log_a x < x \log_a 2$

$2^x \geq 2^{\lfloor x \rfloor} = (1+1)^{\lfloor x \rfloor} \geq 1 + \lfloor x \rfloor > x$

$2^x > x \Rightarrow \log_a x < \log_a 2^x \Rightarrow \log_a x < x \log_a 2$

Gerarchia degli infiniti → $\forall a \in \mathbb{R}\ a > 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha > 0$ $\quad \lim_{n \to \infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \quad \partial n^\alpha > \partial \log_a n$

DIMOSTRAZIONE → $\log_a x < x \log_a 2 \quad x = n^{\alpha/2}$

$\log_a n^{\alpha/2} < n^{\alpha/2} \log_a 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \log_a n < n^{\alpha/2} \log_a 2 \Rightarrow \frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} < \frac{2}{\alpha} \cdot \log_a 2$

moltiplichiamo entrambi per $\frac{1}{n^{\alpha/2}}$ $\quad 0 < \frac{\log_a n}{n^\alpha} < \frac{\frac{2}{\alpha} \cdot \log_a 2}{n^{\alpha/2}} \xrightarrow[\substack{\text{Tende} \\ \lim_{n \to \infty}}]{} 0 \left(\frac{\log_a 2}{n^{\alpha/2}} = \frac{\log}{\text{POTENZA}} = \frac{\text{num}}{\infty} = 0 \right)$

GERARCHIA DEGLI INFINITI → I logaritmi sono di ordine inferiore alle potenze che sono di ordine inferiore agli esponenziali

velocità crescente con cui vanno all'∞ $\partial \log_a n < \partial n^\alpha < \partial a^n < \partial n! < \partial n^n \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \partial n! > \partial a^n$

FORMULA DI STIRLING → $n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$ ($n!$ tende a ∞ come $n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$)

LIMITI NOTEVOLI $\{a_n\}: |a_n| \to +\infty \quad (1 + 1/a_n)^{a_n} \to e$

- $(1 + \Theta y)^{1/y} \to e^\Theta \quad y \to 0 \ (\frac{1}{n}) \quad \forall \Theta \in \mathbb{R}$
- $\frac{\log(1+y)}{y} \to 1 \quad y \to 0$
- $\frac{a^y - 1}{y} \to \log a \quad y \to 0 \quad \forall a > 0$
- $\varepsilon_n \to 0 \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ (Tende a 0)

DIMOSTRAZIONE $\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = 1 \quad \varepsilon_n \xrightarrow[\text{Tende}]{} 0$

delta → $\delta_n = \ln(1 - \varepsilon_n) \Rightarrow \varepsilon_n = e^{\delta_n} - 1$

$\lim_{n \to \infty} \frac{\delta_n}{e^{\delta_n} - 1} = 1$ (Tende a 0) $\quad \delta_n = \varepsilon_n \ \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ anche $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$

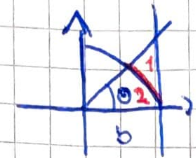
DIMOSTRAZIONE $\lim_{n \to \infty} \frac{(1 + \gamma_n)^\alpha - 1}{\gamma_n} = \alpha \quad z = (1 + \gamma_n)^\alpha - 1 \Rightarrow \log(1 + z) = \alpha \log(1 + \gamma_n) \quad z \to 0$

$\lim_{n \to \infty} \frac{(1 + \gamma_n)^\alpha - 1}{\gamma_n} = \frac{z}{\log(1+z)} \cdot \frac{\log(1 + \gamma_n)}{\gamma_n} \alpha \Rightarrow \frac{\overbrace{(1 + \gamma_n)^\alpha - 1}^{z}}{\log 1 + (1+\gamma)^\alpha - 1} \cdot \frac{\log 1 + \gamma_n}{\gamma_n} \alpha =$

Poniamo $\alpha = 1$ $\quad \frac{1 + \gamma_n - 1}{\log 1 + 1 + \gamma_n - 1} \cdot \frac{\log 1 + \gamma_n}{\gamma_n} \cdot 1 = \frac{\gamma_n}{\log 1 + \gamma_n} \cdot \frac{\log 1 + \gamma_n}{\gamma_n} \Rightarrow 1$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } q < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \nexists \text{ NON ESISTE} & \text{se } q = -1 \\ \infty & \text{se } q < -1 \quad \nexists \text{ in } \mathbb{R}^*, \text{ ma esiste in } \mathbb{R} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE $\to$ ε_n (succ) $\xrightarrow{\text{tende}} 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ $\quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funzione pari simmetrica rispetto a y



area triangolo esterno $\frac{1}{2} \sin\theta \le \frac{1}{2}\theta \le \frac{1}{2}\tan\theta$ ← triangoli 1, 2

↑ spicchio 1

$\cos\varepsilon_n \le \frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \le 1$ per il teorema del confronto tende a 1 anche $\sin\varepsilon_n$

$\varepsilon_n \to 0$ $\quad 1 \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}$ $\quad \cos\theta \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$

$\cos 0 = 1$

DIMOSTRAZIONE $\to \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \varepsilon_n \to 0$ succesione che tende a 0

$$\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \cdot \frac{1+\cos\varepsilon_n}{1+\cos\varepsilon_n} = \frac{1-\cos^2\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2(1+\cos\varepsilon_n)} = \frac{\sin^2\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2(1+\cos\varepsilon_n)} = 1/2$$

trigonometria; limite notevole che tende a 1; $1+\cos\varepsilon_n$ tende a $1+1=2$

$\cos 0 = 1$, $\varepsilon_n \to 0$

ALTRI LIMITI NOTEVOLI $\quad \frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$; $\frac{\operatorname{arctg}\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ $\quad \frac{\arcsin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI $\Rightarrow (1+x)^n \ge 1+nx \iff \forall a>1, \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \sqrt[n]{a}-1 \le \frac{a-1}{n} \iff a \le \left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n$

↳ Per ogni intero $n \ge 0$ e ogni numero reale $x \ge -1$. La disuguaglianza di Bernoulli è un passo cruciale nella dimostrazione di altre disuguaglianze

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE BERNOULLI $\to n_0 \Rightarrow (1+x)^0 \ge 1+0x \Rightarrow 1 \ge 1$

IPOTESI INDUTTIVA $(1+x)^n \ge 1+nx$ | IPOTESI $\quad (1+x)^{n+1} \ge 1+(n+1)x$ | TESI

$n=1$ $\quad (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \ge (1+nx)\cdot(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \ge 1+x+nx = 1+(1+n)x$

↳ sarà sicuramente positivo e lo levo.

- FORME ASINTOTICHE $\quad n\to\infty \quad \varepsilon_n \to 0$ | $\sin\varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ $\quad 1-\cos\varepsilon_n \sim \varepsilon_n^2/2$ $\quad \ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

$e^{\varepsilon_n}-1 \sim \varepsilon_n$ $\quad (1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\varepsilon_n$ $\quad \operatorname{tg}\varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ $\quad \operatorname{arctg}\varepsilon_n \sim \varepsilon_n$

Si possono usare solo per i limiti con i prodotti, con la somma e la differenza possiamo usarli fintanto che ~~le~~ forme asintotiche non si annullerò a vicenda. Ma è preferibile non usarle con le somme e scoprire il limite della successione in un altro modo

FUNZIONI

LIMITE PER ECCESSO $\to$ $f(x)$ tende ad l per eccesso $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^+$, se $f(x)$ è una funzione con limite finito l per x che tende a x_0 e assume sempre valori maggiori di l in un intorno di x_0, con al più $x \neq x_0$ $|f(x)-l| < \varepsilon \wedge f(x) > l \to 0 < f(x) - l < \varepsilon$

verifica $l < f(x) < l+\varepsilon$

LIMITE PER DIFETTO $\to$ $f(x)$ tende ad l per difetto $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^-$, se $f(x)$ è una funzione con limite finito l per x che tende a x_0 e assume sempre valori minori di l in un intorno di x_0, con al più $x \neq x_0$ $\quad -\varepsilon < f(x) - l < 0$ $\quad$ VERIFICA $l - \varepsilon < f(x) < l$

LIMITE DESTRO $\to \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ lim tende a un valore positivo. Resta sempre maggiore di x_0. "x tende a x_0 da destra". $|f(x)-l| < \varepsilon$ è verificata per ogni x e a un intorno destro di $x_0 \to (x_0; x_0+\varepsilon)$

LIMITE SINISTRO $\to \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ lim tende ad un valore negativo. $|f(x)-l| < \varepsilon$ deve essere verificata per ogni x appartenente a un intorno sinistro di x_0 quindi $(x_0-\varepsilon; x_0)$.

LIMITE $\to$ Esiste solo se il limite destro e sinistro coincidono $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

↳ È un ingrandimento su un intervallo piccolissimo in modo da capire come si muove la funzione in quell'intervallo.

FUNZIONE $\to$ relazione che associa ad ogni elemento di a (dominio), uno ed un solo elemento di b (codominio) dove a e b sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ diversi da $\emptyset$ (insieme vuoto)

Definizioni funzioni

x: indipendente
y: dipendente

Funzione = relazione che associa ad ogni elemento di a (dominio), uno ed un solo elemento di b (codominio) dove a e b sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ diversi da $\emptyset$ (insieme vuoto)

Grafico della funzione = rappresenta le coppie ordinate x e y con $x \in A$ e $y \in B$ $\{x,y \mid x \in A \wedge y \in B\}$

Immagine → tutte le ordinate (asse y) corrispondenti alle ascisse (asse x)

Funzioni iniettive = una funzione è iniettiva se ogni elemento di A, ha al più un elemento di B $|A| \leq |B|$

Funzioni suriettive = una funzione è suriettiva se ogni elemento di B, ha almeno un elemento di A $|A| \geq |B|$

Funzioni biettive = una funzione è biettiva se ogni elemento di A, ha uno ed un solo elemento di B $|A| = |B|$

Cardinalità = numero degli elementi in un insieme → |nome insieme|

Funzione algebrica = catena, per la variabile x, operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, elevamento a potenza, estrazione di radice $[y = f(x)]$

Funzione razionale intera = È espressa mediante un polinomio. Se è di primo grado rispetto alla variabile x la funzione è lineare. Se è di secondo grado, la funzione è quadratica $[y = 8x^2 - 1]$

Funzione irrazionale = Se la variabile indipendente (x) compare sotto radice $[y = \sqrt{9-x}]$

Dominio naturale = È il sottoinsieme più grande di $\mathbb{R}$. È l'insieme più grande dei valori reali che si possono associare alla variabile indipendente (x) affinché esista il corrispondente valore reale y

Funzioni uguali = $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono funzioni uguali se hanno lo stesso dominio D e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D$

Zero della funzione = Un numero reale a è uno zero della funzione $y = f(x)$ se $f(a) = 0$
Gli zeri sono le ascisse dei punti di intersezione con l'asse x, Annullano il numeratore

Intorno = un punto si blocca e si salta, intorno destro viene decrementato, intorno sinistro viene incrementato

Simmetria di una funzione = f pari → 1° 2° quadrante o 3° e 4° quadrante → simmetria rispetto alle y
f dispari → 1° 3° quadrante o 2° e 4° quadrante → simmetria rispetto allo O

Limite → è un riguardo su un intervallo piccolissimo in modo da capire come si muove la funzione in quell'intervallo

Funzioni Trascendenti = se presenta logaritmi, esponenziali o seno e coseno

Asintoto: una retta alla quale si avvicina indefinitamente una retta funzione

F pari = se $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in -x \in D \subset \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x)$ → simmetrica rispetto alla y

F dispari = se $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in -x \in D \subset \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$ → simmetrica rispetto all'origine

→ grafico simmetrico rispetto alla bisettrice 1° e 3° quadrante

F inversa = $f(x)$ o $f(x)$ il dominio e il codominio si scambiano, deve essere biunivoca, da b va a a

Codominio (y) b = insieme di arrivo dei valori della funzione, è rappresentato sulle ordinate (y)

Dominio (x) a = insieme di partenza dei valori della funzione, è rappresentato sulle ascisse (x)

Valore assoluto = ribaltiamo la parte negativa nella ~~grafico~~ parte positiva del grafico

periodicità = quando $f(x) + T = f(x)$ Incremento T che ritorna a $f(x)$
↓ periodo

$f(x)$ = controimmagine (dominio) x

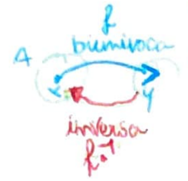
IMMAGINE = immagine (codominio) y

ortotetica → scala
isometrica → mantiene le stesse misure

Funzione biunivoca -> $y=f(x)$ da A a B -> associa ad ogni elemento di a, uno ed un solo elemento di B
se non è biunivoca in A è sempre effettuare una restrizione del dominio.

Funzione inversa -> data la funzione inversa di f è la funzione biunivoca $x=f^{-1}(y)$ da B ad A che associa ad ogni y di B il valore x di A tale che $y=f(x)$

↳ Se una funzione ammette inversa, è invertibile

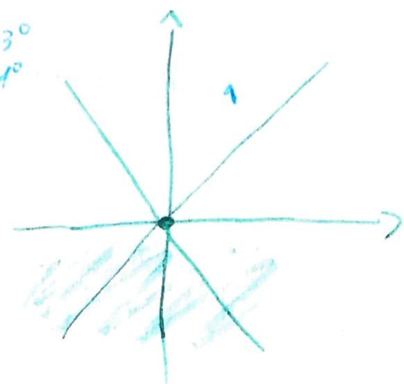


I grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice 1°-3° quadrante

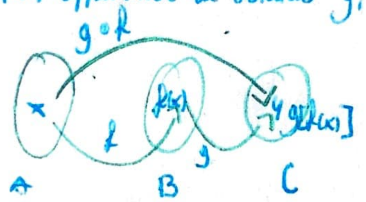
Asintoto -> una retta o più generalmente una curva alla quale si avvicina indefinitamente una funzione data

Valore assoluto

$Y=|x|$ => BISETTRICE 1° 3°
2° 4°



Funzione composta -> $f \circ g$ -> associando a ogni elemento x del dominio f che abbia immagine $f(x)$ appartenente al dominio g, il valore y immagine di $f(x)$ mediante g



insieme di arrivo di A coincide con insieme di partenza di B

Funzione crescente $y=f(x)$ è crescente in senso stretto in un intervallo I sottoinsieme di D se scelti x_1 e x_2 appartenenti a I con $x_1<x_2$ $f(x_1)<f(x_2)$

Funzione decrescente $y=f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una funzione decrescente in senso stretto in un intervallo I sottoinsieme di D se scelti x_1 e $x_2 \in$ I con $x_1<x_2$ risulta $f(x_1)>f(x_2)$

Funzione monotòne - una funzione di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è monotòna in senso stretto in un intervallo I sottoinsieme di D se in quell'intervallo è sempre crescente o sempre decrescente in senso stretto

LIMITI DI FUNZIONE Se $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, tutti i punti di I sono punti di accumulazione per I. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ con $+\infty$ e $-\infty$

DEF SUCCESSIONALE → I intervallo, $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, f definita in I (salvo al più x_0) → può essere definita o no. x_0, non ci interessa

LIMITE FINITO → f tende a L ($L \in \overline{\mathbb{R}}$ ($+\infty$; $-\infty$)) quando x tende a x_0

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se $\forall \{x_n\} \subset I$ con $x_n \to x_0$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n$

LIMITE TENDENTE ALL'INFINITO → $I = (a; +\infty)$ $f: I \to \mathbb{R}$ f tende a $L \in \overline{\mathbb{R}}$ quando $x \to +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L^+$

Se $\forall \{x_n\} \subset I$, $x_n \to +\infty$ (ascisse tendono a $+\infty$), $f(x_n) \to L^+$ (le ordinate tendono ad L)

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \forall \{x_n\} \subset I$, $x_n \to x_0^+$ $f(x_n) \to L$

DEF TOPOLOGICA = $L \in \overline{\mathbb{R}}$ $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$ f è definita in un intorno $U(\bar{x})$ salvo al più in $\bar{x}$ $\forall$ intorno $U(L)$ esiste $U(\bar{x})$: $x \in U(\bar{x}) \wedge x \neq \bar{x} \Rightarrow f(x) \in U(L)$

DEF METRICA = $f: I \to \mathbb{R}$ salvo al più in $x_0 \in I$ si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ($L \in \mathbb{R}$) numero reale

$\lim_{x \to x_0} f(x) =$

- L se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_\varepsilon : \forall x$ con $0 < (x - x_0) < \delta$ $|f(x) - L| < \varepsilon$
- $+\infty$ se $\forall K > 0$ $\exists \delta = \delta_K : \forall x$ con $0 < (x - x_0) < \delta$ $f(x) > K$
- $-\infty$ se $\forall K > 0$ $\exists \delta = \delta_K : \forall x$ con $0 < (x - x_0) < \delta$ $f(x) < -K$

diverge

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

- L se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M = M_\varepsilon : \forall x > M$ $|f(x) - L| < \varepsilon$
- $+\infty$ se $\forall K > 0$ $\exists M = M_K : \forall x > M$ $f(x) > K$
- $-\infty$ se $\forall K > 0$ $\exists M = M_K : \forall x > M$ $f(x) < -K$

Converge

VERIFICA DEL LIMITE → $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$ $|f(x) - L| < \varepsilon$ $|(2x-1) - 3| < \varepsilon \Rightarrow |2x - 4| < \varepsilon$

- esplicitiamo il valore assoluto $\{ -\varepsilon < 2x - 4 < \varepsilon$
- isoliamo la x aggiungendo il 4 $-\varepsilon + 4 < 2x < \varepsilon + 4$
- dividiamo tutto per il coeff. della x $2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$

$\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2} + 2\right)$ → intorno circolare di 2

ESISTENZA DEL LIMITE → $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ se e solo se $\exists \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) \end{cases}$ esiste il limite se e solo se esistono i limiti da destra e da sinistra. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \nexists$ (i limiti di destra e sinistra sono diversi)

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE → Se $\exists \lim_{x \to \bar{x}} f(x)$ esso è unico $\bar{x}$ → valore generico inventato.

TEOREMA DEL CONFRONTO → Se in $U(\bar{x})$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L = \lim h(x) \Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} g(x) = L$

Corollari → sapendo che $\lim_{x \to \bar{x}} h(x) = 0$
- Se in $U(\bar{x})$ $|f(x)| \leq h(x) \Rightarrow f(x) \xrightarrow[\text{Tende}]{x \to \bar{x}} 0$
- Se in $U(\bar{x})$ $f(x)$ è limitata $\Rightarrow f(x) \cdot h(x) \xrightarrow{\text{Tende}} 0$

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO → $f(x) \xrightarrow{x \to \bar{x}} L$ ($f(x)$ tende ad L quando $x \to \bar{x}$)
- Se $L > 0$ $\exists U(\bar{x})$ ove $f(x) > 0$
- in $U(\bar{x})$ $f(x) \geq 0 \Rightarrow L \geq 0$

TEOREMA ALGEBRA DEI LIMITI = $x \to \bar{x}$, $f(x) \to L_1$ e $g(x) \to L_2$ $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ (numeri reali)

- $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \to \bar{x}} L_1 + L_2$
- $f(x) \cdot g(x) \to L_1 \cdot L_2$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{L_1}{L_2}$ ($L_2 \neq 0$, $\exists U(\bar{x})$ ove $g(x) \neq 0$)
- $f(x)^{g(x)} \to L_1^{L_2}$ ($f(x) > 0$ se $L_1 = 0$, $L_2 > 0$) $x \in \mathbb{R}_+$ $x^\pi = e^{\pi \ln x}$

TEOREMA DI ARITMETIZZAZIONE PARZIALE DI ∞:
- tutti i limiti sono $x \to \bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$

$f(x) \to L$ finito $g(x) \to \pm\infty$	$f + g \to \pm\infty$
$f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$	$f + g \to +\infty$
$f(x) \to -\infty$, $g(x) \to -\infty$	$f + g \to -\infty$
$f(x) \to L$ finito $\neq 0$, $g \to \infty$	$f \cdot g \to \pm\infty$
$f(x) \to L$ finito $\neq 0$, $g \to 0^+$	$f/g \to \pm\infty$
$f(x) \to L$ finito, $g \to \infty$	$f/g \to 0$
$f(x) \to L \in (1; +\infty)$, $g \to +\infty$	$(f(x))^{g(x)} \to +\infty$
$f(x) \to L \in [0; 1)$, $g \to +\infty$	$f^g \to 0$

$\frac{L}{0} = \infty$ $L/\infty = 0$

ASINTOTO ORIZZONTALE → $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$, $y = L$ è asintoto orizzontale per il grafico di $f(x)$

ASINTOTO VERTICALE → $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $x = x_0$ è asintoto verticale per il grafico di $f(x)$

ASINTOTO OBLIQUO → $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$, $y = mx + q$ è asintoto obliquo per il grafico di $f(x)$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \nexists \text{ non esiste} \\ \pm\infty \\ 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$ NON ESISTE ASINTOTO OBLIQUO

$\frac{f(x)}{x} = f(x) \cdot \frac{1}{x}$

$m \neq 0 \to \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \begin{cases} \nexists, \infty \text{ NON ESISTE ASINTOTO} \\ q \text{ (anche } = 0) \end{cases} \Rightarrow y = mx + q$ asintoto obliquo.

TEOREMA DI MONOTONIA DELLE FUNZIONI $\cdot\ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ f é monotona (crescente o decrescente)
allora $\forall c\in(a,b)$ $\exists \lim_{x\to c^-} f(x)$
e sono finiti $\searrow\ \nearrow$ (c'é un distacco della funzione)
$\lim_{x\to c^+} f(x)$
$\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ $\lim_{x\to b^-} f(x)$ esistono e può essere infinito

FUNZIONI CONTINUE = $f:\mathcal{D}f\to\mathbb{R}$ $x\in\mathcal{D}$ f é continua in x_0 se il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
f é continua in A se é continua in ogni punto $x\in A$ $A\subseteq\mathcal{D}$
dire "f é continua" vuol dire che f é continua nel suo insieme di definizione (Dominio)
f é continua in A si può scrivere $f\in\mathcal{C}^0(A)$ $\mathcal{C}$ = c maiuscola
$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ f é continua da destra in x_0. Può essere disegnata senza mai staccare la penna.

TEOREMI FUNZIONI CONTINUE:

- TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO $\to$ $f(x)>0$, f continua in x_0 $\Rightarrow \exists U(x)$ ove $f(x)>0$
- TEOREMA DI CONTINUITÁ DELLE FUNZIONI ELEMENTARI $\to$ sono funzioni continue le potenze, esponenziali, trigonometriche, logaritmiche, funzioni iperboliche e (valore assoluto $|x|$).
- TEOREMA ALGEBRA DELLE FUNZIONI CONTINUE $\to$ f e g sono due funzioni definite entrambe in un intorno di x_0 e continue in x_0, allora sono continue in x_0 le seguenti funzioni $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ $g\neq 0$, f^g $f(x)>0$

FUNZIONE COMPOSTA $\to$ $f\circ g\Rightarrow f(g(y))$. La $f\circ g$, data una x, manda x in y mediante f e associa a y un valore z mediante g
$y=f(x)=e^x$ $z=g(y)=y+1$ $f\circ g=(e^x)+1=e^x+1$. $\mathcal{D}=\{x\in\mathcal{D}(f)\ t.c.\ f(x)\in\mathcal{D}(g)\}$

– **TEOREMA DI CAMBIO DI VARIABILE NEL LIMITE** $\to$ Se f e g sono due funzioni: é definita $f\circ g$ (f composto $g=f(g(x))$) almeno in un intorno del punto $\bar{x}\in\bar{\mathbb{R}}$ ($\bar{x}$ al più escluso) se $g(x)$ tende $\bar{t}$ $x\to\bar{x}$
e $f(t)\xrightarrow{t\to\bar{t}} L\in\bar{\mathbb{R}}$ $\bar{t}\in\mathbb{R}$ $L\in\bar{\mathbb{R}}$, inoltre $g(x)$ é diverso da $\bar{t}$ in $U(\bar{x})$ ($\bar{x}$ escluso), allora $\exists \lim_{x\to\bar{x}} f(g(x))=L$

DIMOSTRAZIONE: Se $\{x_n\}$ qualsiasi successione $x_n\longrightarrow\bar{x}$ $\forall n$ $x_n\neq\bar{x}$ $g(x_n)\to\bar{t}$ (definitivamente $g(x_n)\neq\bar{t}$) $|\exists n_0: \forall n\geq n_0|$
allora $f(g(x_n))\longrightarrow L$
$\lim_{x\to c} f(g(x))$ $z=g(x)$ $\lim_{x\to c} z=\lim_{x\to c} g(x)=m$ $\lim_{x\to c} f(g(x))=\lim_{z\to m} f(z)$
$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln^2(x)-1}{\ln^2(x)+2\ln(x)+1}\right)=$ $z=\ln(x)$ $\lim_{x\to 0^+} z=\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$, $m=-\infty$
$\lim_{z\to-\infty}\left(\frac{z^2-1}{z^2+2z+1}\right)=\lim_{z\to-\infty}=1$ $\partial f=\partial g$ rapporto dei coeff

– **TEOREMA DI CONTINUITÁ DELLA FUNZIONE COMPOSTA** $\to$ Se g definita in $U(x_0)$ e continua in x_0
f definita in $U(t_0)$ e $(t_0=g(x_0))$ f é continua in t_0
allora $f\circ g$ (f composto g) é definita almeno in $U(x_0)$ ed é continua in x_0

DIMOSTRAZIONE $\to$ g continua in x_0 $g(x)\xrightarrow{x\to x_0} g(x_0)=t_0$, usando il teorema di cambio di variabile nel limite $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)\Rightarrow f(g(x_0))$
f é continua
$f(x)=e^{\sin(x^2)}$ é continua perché x^2 é continua, $\sin$ é continua, $\sin x^2$ é continua, $e^{\sin x^2}$ é continua.

LIMITI NOTEVOLI $\to$ $\{a_n\}: |a_n|\to+\infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\to e$ | $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
Se ε_n é una qualsiasi successione che tende a 0, come $\frac{1}{x}$

- $\frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\to 1$ | $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ | $\cdot$ $\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n}\to 1$ | $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
- $\frac{(1+\varepsilon_n)^\alpha-1}{\varepsilon_n}\to\alpha$ | $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ | $\cdot$ $\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\to 1$ | $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
- $\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}\to\frac{1}{2}$ | $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

f è continua nell'intervallo $[a, b]$

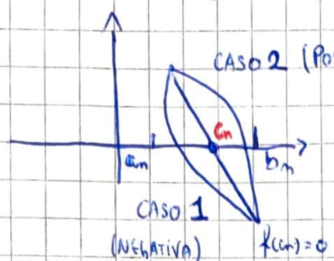
TEOREMA DEGLI ZERI $\rightarrow f \in \mathcal{C}[a;b]$ - $f(a) \cdot f(b) < 0$ (hanno segni discordi)

- Una funzione $\mathcal{C}$ in $[a,b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ (segni discordi), $\exists$ un punto c dove $f(c) = 0$

$\exists c \in [a;b]$ ove $f(c) = 0$ Se f è strettamente monotona $\Rightarrow$ C è unico.
poiché per la definizione un numero nell'intervallo $[a;b]$ è per forza negativo e di conseguenza c'è anche uno 0 nell'intervallo ~~[-1; 2]~~ o c'è 0 in mezzo.

DIMOSTRAZIONE $\rightarrow a_0 = a \quad b_0 = b \quad (a_n, b_n) \mid f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \rightarrow (a_{n+1}, b_{n+1}) \mid f(a_{n+1}) \cdot f(b_{n+1}) < 0$

ALGORITMO: c_n è il punto medio dell'intervallo $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Se $f(c_n) = 0$ STOP (ABBIAMO LA TESI, IL PUNTO) DOVE LA FUNZIONE $= 0$



METODO DI BISEZIONE

Se la $f(c_n) = 0$, la funzione si annulla in quel punto.

- Se $f(c_n) \neq 0$ allora: CASO 1 $\begin{cases} f(a_n) \cdot f(c_n) < 0 \\ f(c_n) \cdot f(b_n) > 0 \end{cases}$ $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$ Prendiamo la prima metà dell'intervallo, dall'inizio fino a c_n

- CASO 2 $\begin{cases} f(a_n) \cdot f(c_n) > 0 \\ f(c_n) \cdot f(b_n) < 0 \end{cases}$ $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$ Prendiamo la seconda metà dell'intervallo da c_n fino alla fine

$\{a_n\}, \{b_n\}$
1) a_n è crescente e limitata | TEOREMA DI MONOTONIA $a_n \rightarrow L_1$
b_n è crescente e limitata | Esiste il limite $b_n \rightarrow L_2$
2) $b_n - a_n = (b-a)/2^m$
3) $f(a_n) \cdot f(b_n)$ è sempre minore di $0 \Rightarrow f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

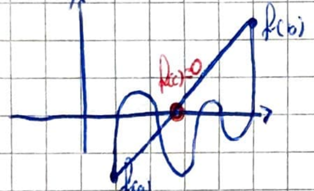
f continua $f(a_n) \rightarrow f(L_1) \quad f(b_n) \rightarrow f(L_2) \quad (b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^m} \xrightarrow{\text{Tende}} 0$

$b_n - a_n \rightarrow L_2 - L_1$ $\Rightarrow L_2 - L_1 = 0 \Rightarrow L_2 = L_1$ verificate contemporaneamente

$\lim_{n \to \infty} f(a_n) f(b_n) < 0 = f(L_1) \cdot f(L_2) = [f(L)]^2 \leq 0$ l'unica possibilità che un quadrato sia uguale a 0 è che $f(L) = 0$

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO $\rightarrow$ limite di una successione negativa è ≤ 0
limite di una successione positiva è ≥ 0

Se il limite di una successione $a > 0$ allora definitivamente $a_n > 0$ (la successione a_n è maggiore di 0)



ENUNCIATO: una funzione $\mathcal{C}$ in $[a;b]$ (intervallo chiuso) con $f(a) \cdot f(b) < 0$ (segni discordi), $\exists$ un punto c dove $f(c) = 0$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS $\rightarrow f: A - \mathbb{R}$ • $f \in \mathcal{C}(A)$; • A è chiuso $[a;b]$; • A è limitato
$\exists x_m, x_M : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \ \forall x \in A$. In pratica la funzione ha il massimo assoluto e il minimo assoluto.

DIMOSTRAZIONE: $A = [a;b]$ mostriamo quindi che f ha il massimo $f(x) \leq f(x_M)$. $S = \sup$ di $f(x)$ $x \in [a;b]$

$\leftarrow S$ deve essere estremo superiore in almeno uno dei due intervalli $[a;b]$

$\{b_n\}$ è limitata decresc. $\{a_n\}$ limitata crescente. In questo caso scegliamo l'intervallo con l'estremo sup $= S$
$\forall_m$ $S =$ estremo superiore $f(x)$ $x \in [a_n; b_n]$

$a_n \xrightarrow{\text{Tende}} x_0$, $b_n \rightarrow x_0 \in [a;b]$. Siccome $a_n \leq x_m \leq b_n$.

DIMOSTRIAMO PER ASSURDO CHE, se $S = +\infty$ $\forall_m \exists x_m \in [a_n; b_n]$: $f(x_m) > m$ (f NON è limitata superiormente)
per il teorema del confronto se $a_n \leq x_m \leq b_n$ e a_n e $b_n \rightarrow x_0$ allora anche $x_m \rightarrow x_0$ quindi $f(x_m) \rightarrow +\infty$, ma essendo f CONTINUA $f(x_m) \rightarrow f(x_0)$ (È ASSURDO PERCHÉ NON PUÒ TENDERE A VALORI DIVERSI)

Prendiamo quindi $S =$ estremo sup $=$ max (minimo dei maggioranti). Per la definizione
$\forall_m \exists x_m \in [a_n; b_n]: S - \frac{1}{m} < f(x_m) \leq S$

$\frac{1}{m} = \varepsilon \xrightarrow{\text{Tende}} 0$ $\quad S - \frac{1}{m} \xrightarrow{\text{Tende}} S \quad f(x_m) \xrightarrow{\text{Tende}} f(x_0) = S \quad S \xrightarrow{\text{Tende}} S$

$f(x_0) = S$
$x_0 = x_M \rightarrow$ Punto dove la funzione assume il valore massimo assoluto.

Perché la f è CONTINUA

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$ $\forall x \in \mathbb{R}(-\infty;+\infty)$

- TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (DARBOUX): Se una funzione è continua in un intervallo $[a;b]$, essa assume tutti i valori compresi nell'intervallo (tra minimo assoluto e max assoluto)

$f \in \mathcal{C}[a;b]$ $m =$ minimo $f(x)$ con $x \in [a;b]$
$M =$ massimo $f(x)$ con $x \in [a;b]$

numero reale
$\forall \lambda (\in \mathbb{R}) \in (m, M)$ $\exists x^* \in [a;b] : f(x^*) = \lambda$

DIMOSTRAZIONE: $\exists x_m : f(x_m) = m$, $\exists x_M : f(x_M) = M$. Prendiamo una nuova funzione $g(x) = f(x) - \lambda$ anche $g(x)$ è continua in $[a;b]$. Prendiamo ora I, l'intervallo chiuso con estremi x_m, x_M: $I \subseteq [a;b]$ questo implica che $g(x)$ è continua anche in I con estremi x_m e x_M (pezzetto di $[a;b]$)

$g(x_m) < 0$, $g(x_M) > 0$ • $g(x_m) \cdot g(x_M) < 0 \Rightarrow \exists x^* \in I : g(x^*) = 0 \Rightarrow f(x^*) = \lambda$ $x^* \in [a;b]$
$\hookrightarrow m - \lambda < 0$ $\hookrightarrow M - \lambda > 0$ (Segni discordi)

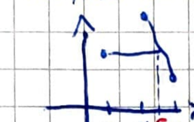
- FUNZIONE INVERSA DI UNA FUNZIONE CONTINUA → I intervallo $f \in \mathcal{C}(I)$: f è invertibile $\Leftrightarrow$ f è strettamente monotona

FUNZIONE INVERTIBILE se ammette un'inversa $\Rightarrow$ $f: D \subseteq \mathbb{R} \to CoD \subseteq \mathbb{R}$ è invertibile se $g: CoD(f) \to D(f)$
(es. $y = x^3 \xrightarrow{\text{inversa}} y = x^{\frac{1}{3}}$) $\hookrightarrow$ deve essere biunivoca (corrispondenza 1 a 1 con gli elementi)

DIMOSTRAZIONE → che f è strettamente monotona $\Rightarrow$ f è invertibile è ovvio.
f non monotona $\Rightarrow$ f non invertibile | → antinominale $P \Rightarrow Q \to \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

non monotona → $\exists x_0 < x_1 < x_2 : f(x_0) < f(x_1) > f(x)$. Supponiamo che $f(x_0) > f(x_2)$° Una funzione non è invertibile se a due x corrisponde una y (NON È BIUNIVOCA). Considerato che se f è biunivoca è sia iniettiva che suriettiva, se f non è iniettiva, non è neanche invertibile.

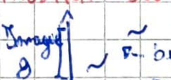
° $\exists c \in (x_1, x_2)$ ove $f(c) = f(x_0)$
per il teorema dei valori intermedi



f non è iniettiva $\Rightarrow$ non può essere invertibile (non è monotona)

- COROLLARIO • Se $f \in \mathcal{C}(I)$, f è strettamente monotona $\Rightarrow$ f^{-1} è strettamente monotona e continua
(implica che ci sia l'inversa e che)

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO = Sia $g = f^{-1}$ g è strettamente monotona ed invertibile (in quanto inversa)
Se per assurdo g non è continua, essendo monotona, ha una discontinuità a salto. l'immagine di g quindi non è intervallo (c'è un buco)
↳ le ordinate che corrispondono al $D f$ essendo $g = f^{-1}$



Dimostrato per assurdo → l'immagine di $g = I$. Dicendo che l'immagine di g quindi non è un intervallo, è come se dicessimo che un intervallo non è un intervallo

Se $f: (a;b) \Rightarrow \mathbb{R}$ monotona allora $\forall c \in (a;b)$ $\exists \lim_{x \to c^-} f$ $\lim_{x \to c^+} f$ Se sono uguali, f è continua altrimenti c'è discontinuità a salto.
(Per valori in)

ALTRI LIMITI NOTEVOLI → $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

$\bar{x} \in \bar{\mathbb{R}}$

INFINITO → Si dice infinito per $x \to \bar{x}$ ogni funzione $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \pm\infty$ | $f(x) = x^2$ è INFINITO per $x \to \pm\infty$
INFINITESIMO → si dice infinitesimo per $x \to \bar{x}$ ogni funzione $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = 0$ | è INFINITESIMO per $x \to 0$

CONFRONTO TRA INFINITI → f e g sono due INFINITI $x \to \bar{x}$ | $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)/g(x) =$
- $\nexists$ infiniti non confrontabili
- $L \neq 0$ infiniti dello stesso ordine
- ∞ f è un infinito di ordine superiore $\partial f > \partial g$
- 0 f è un infinito di ordine inferiore $\partial g > \partial f$

CONFRONTO TRA INFINITESIMI: f e g sono due INFINITESIMI $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)/g(x) =$
- $\nexists$ infinitesimi non confrontabili
- $L \neq 0$ infinitesimi dello stesso ordine
- ∞ f è infinitesimo di ordine inferiore $\partial f < \partial g$
- 0 f è un infinitesimo di ordine superiore $\partial f > \partial g$

INFINITO O INFINITESIMO CAMPIONE → f è un infinito o infinitesimo, $c(x)$ è un infinito o infinitesimo campione
$\exists \alpha > 0$: $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{[c(x)]^\alpha} = L$ finito, $L \neq 0$ si dice che f è un infinito o infinitesimo di ordine α rispetto a $c(x)$

	$x \to \infty$	$x \to 0$	$x \to c$ $(-1; 3; \pi; 2)$
INFINITO CAMPIONE STANDARD	x	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{0} = \infty$	$\frac{1}{x-c}$
INFINITESIMO CAMPIONE STANDARD	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{\infty} = 0$	x	$(x-c)$

ASINTOTICO $\sim$ → si dice asintotico se il limite del rapporto è 1 → vanno a 0 o a $\pm\infty$ con la stessa velocità. $\lim_{x\to\bar{x}} f(x)/g(x) = 1$ $f(x)$ è asintotica a $g(x)$ $f(x) \sim g(x)$

Es. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\sin x \sim x$

TRASCURABILE o → si dice trascurabile se il limite del rapporto è 0 si indica con o
$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)/g(x) = 0$ $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ $f(x) = o(g(x))$

Es. $\lim_{x\to\infty} f(x) = x^4 + \sin x$ $\sin x = o(x^4)$

PROPRIETÀ ⇒ $x \to \bar{x}$ $f(x) \sim g(x)$, $h(x) \sim K(x)$ allora $f(x)\cdot h(x) \sim g(x)\cdot K(x)$ $\frac{f(x)}{h(x)} \sim \frac{g(x)}{K(x)}$

grazie al teorema di cambio di variabili $\square \xrightarrow{\text{tende}} 0$
$\sin\square \sim \square$ $1-\cos\square \sim \frac{\square^2}{2}$ $e^{\square}-1 \sim \square$ $\ln(1+\square) \sim \square$ $(1+\square^{\alpha})-1 \sim \alpha\square$

$e^x - 1 \sim \underbrace{x}$ → parte principale, l'unica presa in considerazione. Es. $\lim_{x\to 0} \sin(x^2) \sim x^2$

ASINTOTICI → $\sim$ → SI COMPORTA COME: $\square \to 0$

$e^{\square}-1 \sim \square$

$\sin\square \sim \square$

$1-\cos\square \sim \frac{\square^2}{2}$ $\cos\square - 1 \sim -\frac{\square^2}{2}$

$\ln(1+\square) \sim \square$

$(1+\square^{\alpha})-1 \sim \alpha\square$

$\tan\square \sim \square$

TRASCURABILE → o → $f(x) \overset{x\to\bar{x}}{\sim} g(x)$ equivale a dire $f(x) = g(x) + o(g(x))$
per definizione $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ è qualcosa di trascurabile e più piccolo di $g(x)$

Prendiamo sempre l'esponente più piccolo $\left[\lim_{x\to 0} x^3 + x^5 \sim x^3\right.$
↑ va più rapidamente a 0. Più una potenza è grande, più è trascurabile rispetto alla potenza di grado inferiore.

REGOLE: $\forall\alpha \cdot o(\lambda x^{\alpha}) = \lambda o(x^{\alpha}) = o(x^{\alpha})$ → ci interessa solo l'esponente, non i coefficienti

$0<\alpha<\beta$ $o(x^{\alpha}) \pm o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha})$ è il più piccolo esponente

$o(x^{\alpha}) \pm \lambda x^{\beta} = o(x^{\alpha})$ $-o$ oppure $+o$ non cambia nulla

$o(x^{\alpha}) \pm o(x^{\alpha}) = o(x^{\alpha})$

$o(x^{\alpha}) \cdot x^{\beta} = o(x^{\alpha+\beta})$ andrà a 0 più velocemente di $o(x^3)\cdot x^2 = o(x^5)$

$o(x^{\alpha}) \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$

INFINITO O INFINITESIMO CAMPIONE

	$x\to\infty$	$x\to 0$	$x\to c$ $(1;\pi;2)$
INFINITO CAMPIONE STANDARD	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-c}$
INFINITESIMO CAMPIONE STANDARD	$\frac{1}{x}$	x	$x-c$

IMMAGINE DI UNA FUNZIONE: è l'insieme dei valori assunti da una funzione sul proprio dominio, ed è quindi contenuta nell'insieme di arrivo della funzione (codominio), con il quale può al più coincidere.

$f(x)$ = controimmagine (dominio) x
immagine (codominio) y

FUNZIONE DERIVABILE: Data una funzione $f:(a;b) \to \mathbb{R}$ (funzione definita in a,b che ha valori in $\mathbb{R}$). f si dice derivabile in $x \in (a,b)$, se esiste il limite del rapporto incrementale $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Se è derivabile, allora la retta

$f'(x)$ $\quad f'(a,b) \to \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto f'(x)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è la retta tangente al grafico in corrispondenza di x_0. Associa ad ogni x la sua derivata in quel punto.

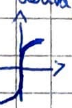
Se esiste il limite finito destro o sinistro, avremo la derivata destra o sinistra. Se f è derivabile, i due limiti coincidono.

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ: Se f è continua ma NON derivabile

PUNTO ANGOLOSO/ANGOLATO $\to \exists f'_+(x), \exists f'_-(x)$ sono diverse $\to x_0$ punto angoloso. Es. $f(x) = |x|$

nell'origine non è derivabile

FLESSO A TANGENTE VERTICALE $\to \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ (il limite non è finito) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



CUSPIDE $\to \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{+\infty}{(-\infty)} \wedge \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{-\infty}{(+\infty)}$ Es. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

TEOREMA $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0. NON VALE IL VICEVERSA

DIMOSTRAZIONE $\to h \to 0$, $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h \xrightarrow{h\to 0} f'(x_0) \cdot h$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} f'(x_0) \cdot h = 0 \Rightarrow f(x_0+h) \xrightarrow{h \to 0} f(x_0) \text{ (funzione continua)}$$

OSSERVAZIONE $\to$ Se f è derivabile in x_0 $\quad f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$ $\quad$ perché $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)$

$\downarrow$ $f'(x_0) \cdot h + h \cdot o(1)$

ALGEBRA DELLE DERIVATE $\to f(a;b) \to \mathbb{R}$, derivabile in x_0

$[f \pm g]' \Rightarrow f' \pm g'$ $\to$ dimostrazione $\to \frac{f(x_0+h) \pm g(x_0+h) - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{h} = \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{Tende } f'} \pm \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\text{Tende } g'}$

$[f \cdot g]' \Rightarrow f'g + fg'$ $\to$ dimostrazione $\to \frac{1}{h}\{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)\} = \frac{1}{h}\{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) +$

$- f(x_0)g(x_0)\} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underbrace{g(x_0+h)}_{\text{Tende a } g} + f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \xrightarrow{\text{Tende}} f'g + f \cdot g'$

$\left[\frac{f}{g}\right]' \Rightarrow \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\to$ dimostrazione $\to \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right\} = \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h \cdot g(x_0+h) \cdot g(x_0)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$\to \left[\frac{f}{g}\right]' = \left[f \cdot \frac{1}{g}\right]' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) \Rightarrow \frac{f'g - fg'}{g^2}$

TEOREMA DELLA CATENA $\to f(a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad g(c,d) \to \mathbb{R}$. derivata di una composta

immagine $f \subseteq (c,d)$ $\quad g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad$ Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$

g è derivabile in $y_0 \in (c,d)$ $\quad y_0 = f(x_0)$

allora $\underset{\text{composta}}{g \circ f}$ è derivabile in x_0 $[g \circ f]'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE: $f(x_0+h) - f(x_0) = K$ $\quad f(x_0+h) = K + f(x_0) = K + y_0$

se $h \to 0 \Rightarrow K \to 0$

$= \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(K+y_0) - g(y_0)}{h} = \frac{g'(y_0) \cdot K + K\,o(1)}{K} \cdot \frac{K}{h}$

$g(K+y_0) - g(y_0) \overset{K \to 0}{\sim} g'(y_0) \cdot K = g'(x_0)K + K\,o(1)$

$= \frac{g'(y_0) \cdot \cancel{K} + \cancel{K} \cdot o(1)}{\cancel{K}} \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[\text{Tende}]{h \to 0} g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

LA DERIVATA DI UNA COMPOSTA È RICORSIVA $\to [h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Tabella delle principali derivate utilizzate nelle scuole medie superiori

Funzione	Derivata
2^x	$2^x \ln 2$
y = costante	y' = 0
y = x	y' = 1
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
$y = \frac{1}{x^2}$	$y' = -\frac{2}{x^3}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = 1 / 2\sqrt{x}$
y = senx	y' = cosx
y = cosx	y' = - senx
y = tangx	$y' = 1/\cos^2 x$ oppure $y' = 1 + \tan g^2 x$
y = cotgx	$y' = -1/\mathrm{sen}^2 x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \log a$
y = log x	y' = 1/x
$y = \log_a x$	$y' = 1 / (x \log a) = (\log_a e) / x$
y = arcsen x	$y' = 1 / \sqrt{(1 - x^2)}$
y = arccosx	$y' = -1 / \sqrt{(1 - x^2)}$
y = arctang x	$y' = 1 / (1 + x^2)$
y = arcctgx	$y' = - 1 / (1 + x^2)$
$y = 1/x$	$y' = -1/x^2$

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

SOMMA E SOTTRAZIONE

$D(f(x)+g(x)) = Df(x) \pm D\,g(x)$

Es: $D(x^7 + 5x^4 + e^x + \ln x) \to 7x^6 + 20x^3 + e^x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^{-1}$

$\Rightarrow -1x^{-2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2}\quad f''(x)$

$\Rightarrow$

$2x^{-3}\quad f'''(x)$

MOLTIPLICAZIONE

$D(f(x)\cdot g(x)) = (D(f(x))\cdot g) + (f\cdot(D(g(x))))$

Es $D(x^3e^x) = (3x^2\cdot e^x) + (x^3e^x) = x^2e^x(3+x)$ $\Rightarrow$ FATTORE TOTALE

DIVISIONE

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df\cdot g) - (f(Dg))}{g^2}$$

Es $$D\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3-2}\right) = \frac{((2x+3+0)(x^3-2)) - ((x^2+3x+1)\cdot(3x^2-0))}{(x^3-2)^2} \Rightarrow \frac{2x^4-4x+3x^3-6-3x^4-9x^3-3x^2}{(x^3-2)^2}$$

$$\frac{-x^4-6x^3-3x^2-4x-6}{(x^3-2)^2}$$

DERIVATE DI F COMPOSTE

$\sin(\ln(5x^3+10x^2+1)) =$

$D'(f(g(x))) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$D\,h(f(g(x))) \Rightarrow f'(f(g(x)))\cdot f'(g(x))\cdot g(x)$

$D(\sin(\ln(5x^3+10x^2+1))) = \cos(\ln(5x^3+10x^2+1))\cdot\frac{1}{5x^3+10x^2+1}\cdot 15x^2+20x \Rightarrow \frac{15x^2+20x}{5x^3+10x^2+1}\cdot\cos(\ln(5x^3+10x^2$

DERIVATE DI GRADO SUP. AL SECONDO

$y = x^4+3x^2+2x+1$

$y' = 4x^3+6x+2$

$y'' = 12x^2+6$

$y''' = 24x$

$y^{IV} = 24$

$y^{V} = 0$

TRIGONOMETRICHE SONO CICLICHE

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

$y''' = -\cos x$

$y^{IV} = \sin x$

$y = \ln x$

$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$y'' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$y''' = +2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

Arrivano a 0 quando sono di grado superiore a quello del polinomio.

TEOREMA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA $f(a,b) \to \mathbb{R}$ continua e invertibile $g = f^{-1}$

$g: f(a;b) \to \mathbb{R}$, Se f derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0) \neq 0$ allora g é derivabile in $y_0 = f(x_0)$ $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ $g(f(x)) = x \Rightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1 \Rightarrow g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

DIMOSTRAZIONE: $f(x_0) = y_0$ $g(y_0) = x_0$ $f(x_0+h) = y_0 + K$ $g(y_0+K) = x_0 + h$

$K \neq 0 \Rightarrow h \neq 0$ $K \to 0 \Rightarrow h \to 0$

$$\frac{g(x_0+K)-g(y_0)}{K} = \frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \Rightarrow \lim_{K\to 0}\frac{g(y_0+K)-g(y_0)}{K}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

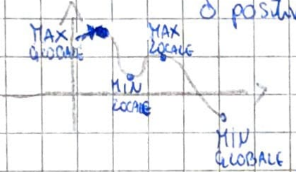
DERIVATE FONDAMENTALI → $K' = 0$ (derivata di costante $= 0$) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(e^x)' = e^x$ $\sin x = \cos x$

MASSIMO ASSOLUTO → $f: I \to \mathbb{R}$, M é max assoluto di f in I, $x_0 \in I$ é il punto di max assoluto se $M = f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I$. Un punto di max assoluto é anche punto di max locale.

MASSIMO LOCALE → $f: I \to \mathbb{R}$. M é max locale di f $x_0 \in I$ é il punto di max locale se esiste un δ positivo ~~tale~~ per cui $M = f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I$ (intorno di x_0)

MINIMO ASSOLUTO → $f: I \to \mathbb{R}$, m é min assoluto di f in I, $x_0 \in I$ é il punto di min assoluto se $m = f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in I$

MINIMO LOCALE → $f: I \to \mathbb{R}$, m é min locale di f, $x_0 \in I$ é il punto di min locale se esiste un δ positivo per cui $m = f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \cap I$ (intorno di x_0)



TEOREMA DI FERMAT → $f(a,b) \to \mathbb{R}$ se • x_0 é un punto estremo locale • f é derivabile in x_0, allora $\}$ $f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE x_0 max locale $f(x) \leq f(x_0)$

1ª ipotesi

- se $h > 0$ $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ → per Teor. permanenza segno ⇒ $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow f'_+(x_0) = 0$
- se $h < 0$ $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'_-(x_0) = 0$

Se f é derivabile, derivata destra e sinistra coincidono $f(x_0) = f'_+(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Se $f'(x_0) = 0$, x_0 é un punto critico (dove si annulla la derivata). Una derivata puó annullarsi anche negli estremi o dove non esiste la derivata.

Se $f'(x_0) = 0$, non implica che x_0 sia max o min. Es. $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ la derivata in 0 vale 0, ma non é max/min.

TEOREMA LAGRANGE: $f \in \mathcal{C}[a,b]$ e derivabile in (a,b) ⇒ $\exists c \in (a,b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

che dove si annulla la funzione

DIMOSTRAZIONE: $W(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)\right]$

$W \in \mathcal{C}$ in $[a,b]$ ed é derivabile in (a,b)

$W(a) = W(b) = 0$ $\exists M, m$ max e min assoluto di W (perché l'intervallo é chiuso)

- Se $M = m$ $W(x) = cost$ $W(x) = 0$ $\forall x$ ⇒ $W'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ $\forall x$
- Se $M > m$ nei due estremi la funzione ha lo stesso valore, uno dei due é interno → $\bar{x}$
  - $\bar{x}$ é estremo assoluto (quindi locale) $\}$ TEOREMA FERMAT ⇒ $W'(\bar{x}) = 0$
  - f é derivabile in $\bar{x}$

$$W'(\bar{x}) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] = 0$$

$\bar{x} = c$ (punto dove si annulla la funzione)

CONSEGUENZA → TEOREMA TEST DI MONOTONIA → I intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ $f \in \mathcal{C}(I)$, f derivabile in (I)

- f é crescente $\iff f'(x) \geq 0 \ \forall x$
- f é decrescente $\iff f'(x) \leq 0 \ \forall x$

DIMOSTRAZIONE: f é crescente $\iff f'(x) \geq 0$ dimostriamo che se f é crescente, $f'(x)$ é ≥ 0

$\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $h>0$ se f é crescente $f(x_0+h) > f(x_0)$ e quindi la frazione é positiva
$h<0$ se f é decrescente $f(x_0+h) < f(x_0)$ e quindi la frazione é positiva

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

dimostro che se $f'(x) \geq 0$ allora é crescente

$x_{1,2} \in I$ $x_1 < x_2$ $\exists c \in (x_1, x_2)$: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

COROLLARIO $f: I \to \mathbb{R}$ f costante $\iff f'(x) = 0 \ \forall x$

Esempio: $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \underbrace{\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}_{\text{composta}} = 0 \ \forall x$ $\quad \mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$f(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad f(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{2}$

La f per essere costante, deve essere definita in un intervallo, questa funzione é continua in ciascuno degli intervalli, ma ha costanti diverse.

TEOREMA DEL TAPPABUCHI $f(a;b) \to \mathbb{R}$ continua in (a,b) e derivabile in (a,b), salvo al più $x_0 \in (a,b)$

Se esiste $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = L \Rightarrow f$ é derivabile in x_0, $f'(x_0) = L \to$ finito

DIMOSTRAZIONE → $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - (x_0)}$ → LAGRANGE $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0 + \lambda h)$ $\quad \lambda \in (0;1)$

$h \to 0 \Rightarrow x_0 + \lambda h \to x_0$ $\quad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f'(x_0 + \lambda h) = L$

$f(x) = \begin{cases} \sin x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x + 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) = \nexists$ perché non c'é $\lim \cos \frac{1}{x}$

É derivabile nell'origine? Usiamo il limite del rapporto incrementale applicato alla traccia

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) + f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h + h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin h}{h} + \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h}\right) = 1$$

É derivabile nell'origine ma non é continua, il fatto che f sia derivabile, non garantisce che sia continua

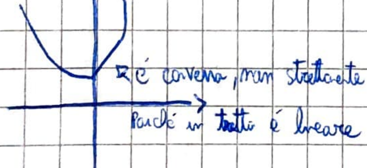
Se $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \Rightarrow f' \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ $\quad$ Esempio $f(x) = x^3 + 4x^2$ $\mathcal{D} = \forall x \in \mathbb{R}$ é continua in tutto $\mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2 + 8x$ $\mathcal{D} = \forall x \in \mathbb{R}$ " " $f \in \mathcal{C}'(\mathcal{D})$

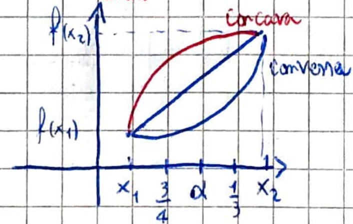
$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D})$ → significa che tutte le derivate sono continue nel dominio.

CONVESSITÁ I intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ Convessa = concavità verso l'alto $\quad$ Concava = concavità verso il basso

Se $x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \underset{\text{convessa}}{\overset{\text{concava}}{\lesseqgtr}} \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ $\quad \forall \alpha \in [0;1]$

STRETTAMENTE CONVESSA Se $f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \underset{\text{concava}}{\overset{\text{convessa}}{\lessgtr}} \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ $\quad \forall \alpha \in (0;1)$





Presi due punti del grafico e uniti con una linea, tutto ciò che é al di sotto deve essere rivolto verso l'alto (CONVESSA) o verso il basso (CONCAVA)

TEOREMA: Se f é convessa (concava) in I $\Rightarrow$ f é continua in tutto I, salvo al più gli estremi
In ogni punto interno possiede derivata destra e sinistra (potrebbe avere dei punti angolosi e quindi può non avere la derivata ovunque, ma ha sempre quella destra e sinistra)

TEOREMA: $f(a;b) \to \mathbb{R}$
- f é derivabile in $(a;b)$
  - dire che f é convessa in $(a;b)$ $\Leftrightarrow$ f' é crescente in $(a;b)$
  - dire che f é concava in $(a;b)$ $\Leftrightarrow$ f' é decrescente in $(a;b)$
- Se f é derivabile 2 volte in $(a;b)$:
  - dire che f é convessa in $(a;b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$
  - dire che f é concava in $(a;b) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a;b)$

PUNTO DI FLESSO $f(a;b) \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in (a;b)$ punto di derivabilità per f $\exists f'(x_0)$ oppure $f'(x_0) = \pm\infty$
Lo dove cambia la concavità
$\hookrightarrow$ si dice "punto di flesso" per f, se $\exists\, \delta > 0$:
- f é convessa in $(x_0 - \delta; x_0)$
- f é concava in $(x_0; x_0 + \delta)$

o viceversa.

TEOREMA $\left.\begin{array}{l} x_0 \text{ punto di flesso per } f \\ \exists\, f'' \end{array}\right\} \Rightarrow f''(x_0) = 0$
$\Leftarrow$ il viceversa non vale Es. $f(x) = x^4$, $f'(x)\ 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$
$f''(0) = 0 \to$ ma all'origine non c'é nessun flesso, anzi la $f(x)$ é convessa

TEOREMA DI DE L'HOPITAL $\to$ f, g funzioni derivabili in $(a;b)$: $g, g' \neq 0$ in $(a;b)$
Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ oppure ∞

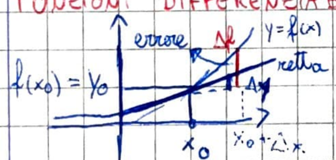
Se esiste $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ (Può essere $\pm\infty$) $\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ $\leftarrow$ Non vale il contrario

Il limite delle funzioni $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ posso calcolare il limite, calcolando il limite delle derivate

Es $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \cos x}{5x + \sin x} = \frac{3}{5}$ $\quad \partial f = \partial g$ APPLICHIAMO DE L'HOPITAL $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{f'}{3 - \sin x}}{\underset{g' \text{ derivata}}{5 + \cos x}}$ $\nexists$

Es $\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \overset{H}{=} \lim_{x \to a} \frac{\cos x}{1} = \cos a$

FUNZIONI DIFFERENZIABILI $\Rightarrow$



f continua
retta $y = y_0 + m(x - x_0)$

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad \Delta y = m \Delta x$
ERRORE $= \Delta f - \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - m\Delta x$
$\lim_{\Delta x \to 0} \text{errore} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f - \Delta y = 0$

Se Δx é un infinitesimo, allora anche l'errore é un infinitesimo
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{errore}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - m\Delta x}{\Delta x} = m$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{derivata}} - m = f'(x_0) - m$
$\hookrightarrow$ Se f é derivabile in x_0

Se f é derivabile in x_0
- se m é $\neq f'(x_0)$, l'errore e Δx sono infinitesimi dello stesso ordine
- se $m = f'(x_0) \Rightarrow$ l'errore é infinitesimo di ordine maggiore rispetto a Δx errore $= o(\Delta x)$

Definizione $f(a;b) \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in (a;b)$, se $\exists\, m$: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - m\Delta x}{\Delta x} = 0$
esiste una retta tangente che lo approssima meglio delle altre.

TEOREMA f é differenziabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ derivabile in x_0 $\quad$ Se $\Delta x \to dx \Rightarrow \Delta f \simeq \Delta y \quad df(x_0) = f'(x_0)\,dx$

Se f é derivabile in x_0, tra tutti i polinomi di primo grado $P_1(x) = mx + q$. L'approssimazione migliore la otteniamo se $\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) \to mx + q = f(x_0) \\ P_1'(x_0) = f'(x_0) \to m = f'(x_0) \end{cases}$ $\Rightarrow P_1(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\frac{d^n}{dx^m} \Rightarrow \left.\frac{(x - x_0)^m}{m!}\right|_{x = x_0} \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

esiste ed è unico

TEOREMA → data f, derivabile n volte in x_0 $\exists!$ polinomio $T_{n,x_0}(x)$, grado $\leq n$, che ha in comune con $f(x)$ i valori di tutte le derivate fino all'ordine n in $x = x_0$

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

POLINOMIO DI TAYLOR → centrato in x_0, di grado n

tutti i coeff sono la derivata della funzione.

↳ polinomio di grado n, centrato in x_0, di x.

Se il polinomio di TAYLOR è centrato nell'origine $(x_0 = 0)$ → POLINOMIO DI MAC LAURIN

$x_0 = 0$ $\quad T_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0) \cdot \frac{(x-0)^2}{2!} + \dots + f^{n}(0) \cdot \frac{(x-0)^n}{n!}$

Esempio MAC LAURIN, ordine 3 $\quad f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = \cos 0 = 1 \qquad f''(0) = -\sin 0 = 0 \qquad f'''(0) = -\cos 0 = -1$

MAC LAURIN $\quad T_{3,0} = 0 + 1\cdot(x-0) + 0 \cdot \frac{(x-0)^2}{2!} - 1\frac{(x-0)^3}{3!} \Rightarrow x - \frac{x^3}{3!}$

SVILUPPO DI TAYLOR → $f(x) = T_{n,x_0}(x) + \text{resto}$ → Peano (descrizione qualitativa)

RESTO SECONDO PEANO

T: $f(a;b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$ allora $f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{o(x-x_0)^n}_{\text{resto}}$

Esempio $x_0 = 0$, $n = 2$ $\quad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

f derivabile 2 volte in $x = 0$

DIMOSTRO: dobbiamo far vedere che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2}}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}^{\to\, o(x)}}{2x} = 0$

f' è derivabile in 0, $\quad g$ derivabile in x_0: $g(x_0+h) - g(x_0) = g'(x_0)h + o(h)$ ← definizione

$x_0 = 0,\ h = x \qquad g(x) - g(0) = g'(0)x + o(x) \qquad g = f'(x) \qquad f'(x) - f'(0) = f''(0)x + o(x)$

RESTO SECONDO LAGRANGE → $f(x) = T_{n,x_0}(x) + \text{resto}$ → Lagrange (descrizione quantitativa)

SVILUPPO DI TAYLOR

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$ $\quad f$ è derivabile $n+1$ volte in $[a;b]$

allora $\exists\, c$ tra x_0 e x: $f(x) = T_{n,x_0}(x) + f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

derivata $n+1$ esima

DIMOSTRAZIONE $\quad x_0 = a,\ x = b,\ n = 1$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2!}$$

$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = K(b-a)^2$ → deve essere $f''(c)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}$

$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - K(b-x)^2$ $\qquad g(b) = 0,\quad g(a) = 0$

sostituiamo la "a" con le x $\qquad$ Se metto b al posto di x $\qquad$ → poiché K deve verificare l'uguaglianza

$\exists\, c: g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow g'(x) = \cancel{-f'(x)} \cancel{+f'(x)} - f''(x)(b-x) + 2K(b-x)$

$g'(c) = -f''(c)\cdot(b-c) + 2K(b-c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f''(c)}{2}$

NON CONOSCEREMO MAI C, quindi non sapremo mai quanto vale l'errore.

ESERCIZIO 1 - ESEMPIO

CONTINUITÀ f continua in $x_0 \in Df$ se esiste finito (È continua a meno che non si formano delle forme indeterminate)

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$$f(x) = \begin{cases} b\log(1-x) & x<0 \\ ax+b & 0 \le x \le 2 \\ e^{x-2}+a & x>2 \end{cases} \qquad Df = \mathbb{R} \quad \left[\begin{matrix} 1-x>0 \\ x<1 \end{matrix}\right]$$

f è continua per $x<0 \vee 0<x<2 \vee x>2$ (Somma o composizione di funzioni continue)

$x_0 = 0 \quad f(0) = b \quad \lim_{x \to 0^-} b\log(1-x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} ax+b = b \; \Big\} \; b=0$

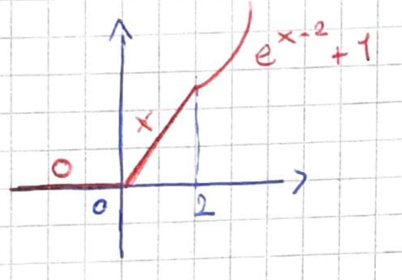
Se $b=0$ f è continua in $x_0 = 0$

leggermente minore di 0, quindi $x<0$: $b\log(1-x)$

$x_0 = 2 \quad f(2) = 2a+b \quad \lim_{x \to 2^+} e^{x-2}+a = 1+a \qquad \lim_{x \to 2^-} ax+b = 2a+b \; \begin{cases} 2a+b = 1+a \\ a+b = 1 \end{cases}$ f è continua in $x_0 = 2$

f è continua su $\mathbb{R}$ $\begin{cases} b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$ $\quad b=0 \quad a=1$

$$\boxed{f(x) \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0 \le x \le 2 \\ e^{x-2}+1 & x>2 \end{cases}}$$



DERIVABILITÀ f è derivabile in $x_0 \in Df$ se esiste finito

limite rapporto incrementale = derivata $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} b\log(1-x) & x<0 \\ ax+b & 0 \le x \le 2 \\ e^{x-2}+a & x>2 \end{cases}$$

f è derivabile in $x<0 \vee 0<x<2 \vee x>2$

$x_0 = 0 \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h}$

Se $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} 0 = \underline{0}$ (Non è F.I. funzione costante che ha valore 0)

Se $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \underline{1}$ non è derivabile perché i due limiti non sono uguali

$x_0 = 2 \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - 2}{h}$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2+h-2}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^h - 2}{h} = \mp\infty$

f non è derivabile (i limiti destro e sinistro sono diversi)

derivata

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 0 & x<0 & x \neq 0 \\ 1 & 0<x<2 & x \neq 2 \\ e^{x-2} & x>2 \end{cases}}$$

Test di monotonia $f'(x) > 0$ $\forall x \in (0;2)$, $\forall x > 2$

$\downarrow$

f crescente

ESERCIZIO 2

valore assoluto

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{x} & x > 0 \\ x\ln(1+x)+e^x & x \le 0 \to -1 < x \le 0 \end{cases}$$

$1+|a\sin(x)|>0$

$\mathcal{D}f = (-1;+\infty)$ $1+x>0$

$x>-1$

CONTINUITÀ $\to$ f continua per $x<0$ (composizione di funzioni continue, $\ln$, x, e^x sono continue)
e $x>0$ (è composta da funzioni continue)

$f(0)=1 \to \ln 1 + e^0 = 1$

$x_0 = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{|a\sin(x)|}}_{\text{tende a } 1} \cdot \dfrac{|a\sin(x)|}{x}$

maggiore di 0

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1\cdot|a\sin(x)|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} |a| \underbrace{\dfrac{\sin(x)}{x}}_{\to \text{ tende a } 1} = |a|$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x\ln(1+x)+e^x = 1$

f è continua in $x_0=0$ se $|a|=1 \to a=+1 \vee a=-1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{x} & x>0 \\ x\ln(1+x)+e^x & x \le 0 \end{cases}$$

f è continua sul $\mathcal{D}f$

Derivabilità f è derivabile per $x<0$

$x<0$ $f'(x) = \underbrace{\ln(1+x) + x\cdot\dfrac{1}{1+x}}_{\text{derivata del prodotto } x\ln(1+x)} + e^x$

per $x>0$ $\sin(x)=0$ $x = k\pi$ $\to$ punti da studiare per la sua derivata

Calcolo derivata per esercitarci:

$f(x) = \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x} \to f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+\sin(x)}\cdot\cos(x)\cdot x - \ln(1+\sin x)}{x^2} \to f'(x) = \dfrac{\frac{x\cos(x)}{1+\sin(x)} - \ln(1+\sin x)}{x^2}$

STUDI DI FUNZIONE

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{|x|-2}$$

$|x|-2 \neq 0 \quad |x| \neq 2 \quad x \neq \pm 2$

① $\mathcal{D}f: (-\infty; -2) \cup (-2, 2) \cup (2; +\infty)$

② proprietà funzione

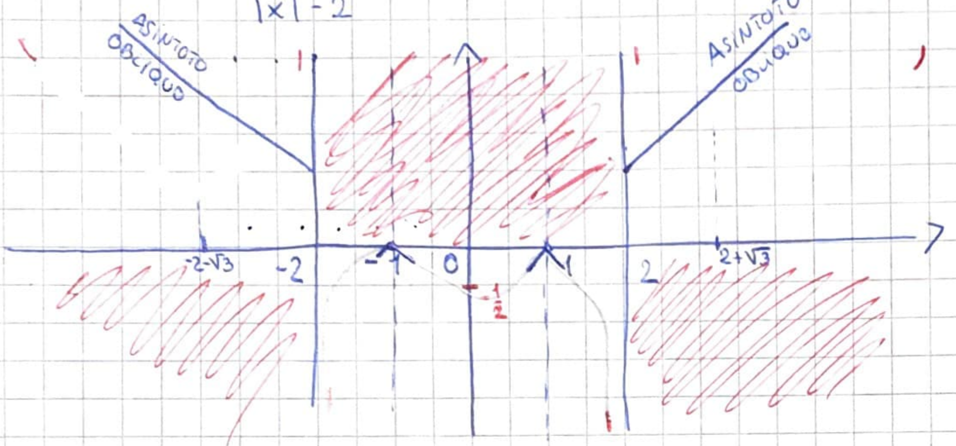
$$f(-x) = \frac{|(-x^2-1)|}{|-x|-2} = \frac{x^2-1}{|x|-2} = f(x) \Rightarrow \text{pari}$$

studio solo $x \geq 0$, per $x < 0$ uso la riflessione rispetto all'asse y
$\mathcal{D}f$ è simmetrico rispetto ad O (origine)

$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ pari
$f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ dispari

③ Zeri e segno di f

$f(x) = 0 \Rightarrow |x^2-1| = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
$f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{|x^2-1|}{|x|-2} \geq 0 \Rightarrow |x|-2 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$



$-2 \quad 0 \quad 2$
$+ \quad - \quad +$

cancello la parte positiva

cancello la parte negativa

$x = -1$ e $x = 1$ massimo relativo

$2+\sqrt{3}$ è un punto di minimo
$-2-\sqrt{3}$ (guardare STEP 8)

④ Limiti e continuità

f è continua su $\mathcal{D}f$ - composizione e quoziente di funzioni continue

Essendo pari, posso studiare la metà dei limiti e poi ribaltare il grafico

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}(1-\frac{1}{x^2})}{\cancel{x}(1-2/x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = +\infty$$

$x = 2^+$ asintoto verticale destro

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty$$

$x = 2^-$ asintoto verticale sinistro

asintoto verticale $x = 2$

⑤ Asintoto obliquo $y = mx + q$

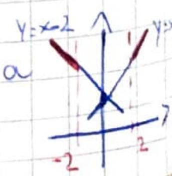
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x(x-2)} = 1$$

(se esiste $m \in \mathbb{R} \neq 0$, calcolo q)

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x-2} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+2x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2$$

ASINTOTO OBLIQUO $y = 1x + 2$

Per la simmetria, se abbiamo uno anche a $-\infty$



6 Asintotici per gli 0 zeri

$f(x)$ $\qquad x_0 = 1 \qquad x_0 = -1$

Per $x \to 1$
$x \to -1$

si annulla

$$\underset{x \to 1}{f(x)} = \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{|x|-2} \sim \frac{2|x-1|}{-1} = -2|x-1|$$

si annulla

$$\underset{x \to -1}{f(x)} = \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{|x|-2} \sim \frac{2|x+1|}{-1} \sim -2|x+1|$$ (Sostituisco gli zeri nella $f(x)$)

Ci dice a cosa è simile la nostra funzione nell'intorno degli 0 "zeri" (nel nostro caso ± 1 punti angolosi e non derivabili)

Non sempre è possibile calcolarli.

7 Derivabilità → Posso calcolarla in tutti i punti tranne $x \neq \pm 1$

$f'(x)$ per $x > 2$ $\quad f(x) = \frac{x^2-1}{x-2} \to f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2-1)}{(x-2)^2} \to f'(x) = \frac{2x^2-4x-x^2+1}{(x-2)^2} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$f'(x)$ per $1 < x < 2$ $\quad f(x) = \frac{x^2-1}{x-2} \to f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

$f'(x)$ per $0 \leq x < 1$ $\quad f(x) = \frac{1-x^2}{x-2} = \frac{-2x(x-2)-(1-x^2)}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

Gli intervalli li trovo guardando il grafico. Posso anche calcolare un'unica derivata.

$$f'(x) = \frac{d(|x^2-1|)\cdot(|x|-2) - |x^2-1| \cdot d(|x|-2)}{(|x|-2)^2}$$

$$d(|x|) = \frac{x}{|x|}$$

$$d(|x^2-1|) = \frac{x^2-1}{|x^2-1|} \cdot 2x$$

$x_0 = 1$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(0)}{h}$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|(1+h)^2-1|}{+h-2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h^2+2h|}{h^2-2h} = -1$$ (è un infinitesimo, guardo l'esponente minore)

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|(1+h)^2-1|}{-h-2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h^2+2h|}{-h^2-2h} = 1$$ ANALOGO AL PUNTO 5

PUNTO DI NON DERIVABILITÀ

Siccome è pari, è analogo anche con $x_0 = -1$

(8) Punti stazionari $f'(x) = 0$ $\quad \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} = 0 \quad , \quad \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

Ne guardo solo 1 perché si comportano nello stesso modo

$x^2-4x+1=0$

$x^2-4x+4=3$

$(x-2)^2=3 \rightarrow x = 2+\sqrt{3}$ minimo

$x = 2-\sqrt{3}$

per la simmetria pari della funzione, anche $-2-\sqrt{3}$ è un minimo

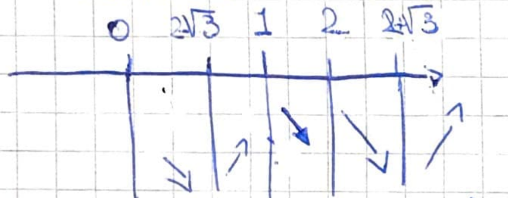
(9) Monotonia $f'(x) \geq 0 \rightarrow f$ è crescente

$0 \leq x < 1$

$1 < x < 2$

$x > 2$

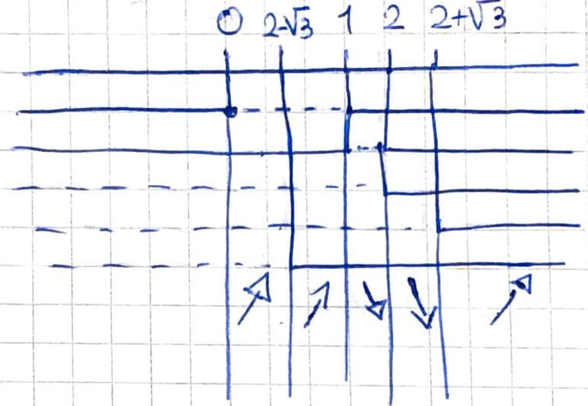
$0 \leq x \leq 2 \qquad x > 2$



$x=0$ minimo

poiché è pari e quindi devo ribaltarla dall'altro lato

$x = 2+\sqrt{3}$ minimo



$f(x) = x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2}$ ① Dominio $|x| \neq 0$ $\forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

② PROPRIETÀ

$f(-x) = -x\sqrt[3]{(\ln|-x|)^2} = -x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = -f(x)$ dispari $\to$ simmetrica rispetto all'origine

studio solo $x > 0$

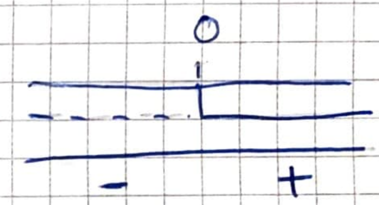
③ Studio zeri e segni

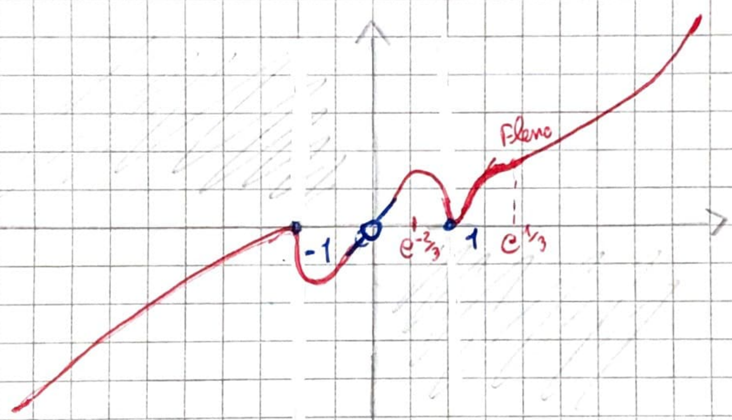
$f(x) = 0$ $\quad x = 0 \quad \vee \quad \sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = 0 \to e^{\ln|x|} = e^{0} \to |x| = 1 \to x = \pm 1$

non accettabile fuori dal dominio

$f(x) \geq 0$ $\quad x > 0$

$\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (c'è il quadrato)





$x = 1$ minimo
$x = -1$ massimo
relativi

④ limiti e continuità f è continua in $\mathbb{R} - \{0\} \to$ nel suo dominio (composizione f continua)

$$\lim_{x \to +\infty} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln(x)^{-2/3}} = 0^+$$

$\ln 0 = -\infty$

$(\ln 0)^2 = +\infty$

tende a 0^+

f è prolungabile per continuità in $x = 0$

$$f = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è continua in 0

⑤ Asintoti obliqui $y = mx + q$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{(\ln|x|)^2}}{\cancel{x}} = +\infty$$ (non ci sono asintoti obliqui) né a $+\infty$ né a $-\infty$

~~⑥ derivabilità~~

$$\cancel{f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln(x))^2} & x > 0 \\ -x\sqrt[3]{\ln(-x)^2} & x < 0 \end{cases}}$$

⑥ Asintotico per gli 0 zeri $x_0 = 1$ $\quad x_0 = -1$

$x_0 = 1$ $\quad f(x) = x\sqrt[3]{(\ln(x))^2} \sim \sqrt[3]{(\ln(x))^2} \sim (x-1)^{2/3}$

per $x \to 1$

$$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) = \ln[1 + (x-1)] \sim (x-1)$$

Analogo per $x_0 = -1$

(7) Derivabilità $f(x) \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} & x>0 \\ x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} & x<0 \end{cases}$

Cuspide, poiché tendono ad ∞ con lo stesso segno. Punti di non derivabilità

$$f'(x) = \sqrt[3]{(\ln|x|)^2} + \cancel{x}\,\frac{2}{3}(\ln(x))^{-1/3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \sqrt[3]{(\ln|x|)^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\ln(x)}} = \boxed{\frac{\ln(x)+2/3}{\sqrt[3]{\ln(x)}}} \quad x>0$$

Dominio di f': $\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} \neq 0 \to e^{\ln|x|} \neq e^0 \to |x| \neq e^0 \to |x| \neq 1 \to x \neq \pm 1$

Non derivabilità

$$x_0 = 1 \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{[\ln(1+h)]^2}\,(h+1) - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h+1)[\ln(1+h)]^{2/3}}{(h)^{1/3}(h)^{2/3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h+1}{h^{1/3}}\underbrace{\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]^{2/3}}_{\text{tende a } 1} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h+1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

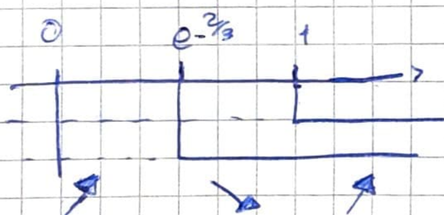
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{h+1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

$x_0 = 1$ non derivabilità: limite destro e sinistro sono diversi.

(8) Punti stazionari $f'(x)=0$ $\quad \ln(x)+\frac{2}{3}=0 \quad e^{\ln(x)} = e^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x = e^{-2/3}$

$x = -e^{2/3}$ per simmetria

(9) Monotonia f monotona $f'(x)>0$ $\quad \frac{\ln|x|+2/3}{\sqrt[3]{\ln x}} \geq 0$ $\quad N\geq 0$ $\ln|x|+2/3 \geq 0$ $\quad \boxed{x \geq e^{-2/3}}$



$f'(x)\geq 0 \to$ crescente $\quad D>0$ $\quad e^{\ln(x)} > e^0 \Rightarrow x > e^0 \to x>1$

$x = e^{-2/3}$ massimo locale

$x = 1$ minimo locale

(10) Derivata seconda solo di $x>0$ per via della simmetria $f'(x) = \frac{\ln x + \frac{2}{3}}{\ln(x)^{1/3}}$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(x)^{1/3} - \left(\ln x + \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}[\ln(x)]^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^{2/3}}$$

$$= \frac{\ln(x) - \frac{1}{3}\ln x - 2/9}{x(\ln(x))^{4/3}} = \frac{\frac{2}{3}\ln(x) - \frac{2}{9}}{x[\ln(x)]^{4/3}}$$

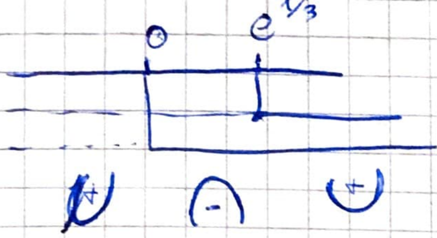
$D f''(x)$ $\quad x\neq 0$ $\quad e^{\ln(x)} \neq e^0 \to x \neq e^0 \to x \neq 1$ (già studiata nella derivata prima)

(11) Zeri e segni di f'' $\to$ concavità $\cap$ e convessità $\cup$ $\quad f''(x) = 0$

$\frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9} = 0 \quad e^{\ln(x)} = e^{\frac{1}{3}} \quad x = e^{1/3}$ per simmetria dispari $x = -e^{+1/3}$

$f''(x)\geq 0 \quad \frac{\frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9}}{x(\ln x)^{4/3}} \geq 0 \Rightarrow N\geq 0 \to \frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9} \geq 0 \to x \geq e^{1/3}$

$D>0 \to x>0$



$f''(x) \geq 0 \to f$ ha concavitá verso l'alto

$f \Rightarrow x = e^{1/3}$ é un flesso (punto dove cambia la concavitá)