- TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (DARBOUX): Se una funzione è continua in un intervallo $[a;b]$, essa assume tutti i valori compresi nell'intervallo (tra minimo assoluto e max assoluto)

$f \in \mathscr{C}[a;b]$ $m =$ minimo $f(x)$ con $x \in [a;b]$
$M =$ massimo $f(x)$ con $x \in [a;b]$

numero reale
$\forall \lambda (\in \mathbb{R}) \in (m, M)$ $\exists x^* \in [a;b] : f(x^*) = \lambda$

DIMOSTRAZIONE: $\exists x_m : f(x_m) = m$, $\exists x_M : f(x_M) = M$. Prendiamo una nuova funzione $g(x) = f(x) - \lambda$ anche $g(x)$ è continua in $[a;b]$. Prendiamo ora I, l'intervallo chiuso con estremi x_m, x_M: $I \subseteq [a;b]$ questo implica che $g(x)$ è continua anche in I con estremi x_m e x_M (pezzetto di $[a;b]$)

$g(x_m) < 0$, $g(x_M) > 0$ • $g(x_m) \cdot g(x_M) < 0 \Rightarrow \exists x^* \in I : g(x^*) = 0 \Rightarrow f(x^*) = \lambda$ $x^* \in [a;b]$
$\hookrightarrow m - \lambda < 0$ $\hookrightarrow M - \lambda > 0$ (Segni discordi)

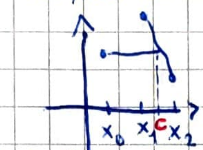
- FUNZIONE INVERSA DI UNA FUNZIONE CONTINUA $\to$ I intervallo $f \in \mathscr{C}(I)$: f è invertibile $\Leftrightarrow$ f è strettamente monotona

FUNZIONE INVERTIBILE se ammette un'inversa $\Rightarrow$ $f: D \subseteq \mathbb{R} \to CoD \subseteq \mathbb{R}$ è invertibile se $g: CoD(f) \to D(f)$
($y = x^3 \xrightarrow{\text{inversa}} y = x^{\frac{1}{3}}$) $\hookrightarrow$ deve essere biunivoca (corrispondenza tra 1 con gli elementi)

DIMOSTRAZIONE $\to$ che f è strettamente monotona $\Rightarrow$ f è invertibile è ovvio.
f non monotona $\Rightarrow$ f non invertibile | $\to$ antinominale $P \Rightarrow Q \to \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

non monotona $\to$ $\exists x_0 < x_1 < x_2 : f(x_0) < f(x_1) > f(x_2)$. Supponiamo che $f(x_0) > f(x_2)$ ° Una funzione non è invertibile se a due x corrisponde una y (NON È BIUNIVOCA). Considerato che se f è biunivoca è sia iniettiva che suriettiva, se f non è iniettiva, non è neanche invertibile.

° $\exists c \in (x_1, x_2)$ ove $f(c) = f(x_0)$
per il teorema dei valori intermedi



f non è iniettiva $\Rightarrow$ non può essere invertibile (non è monotona)

- COROLLARIO • Se $f \in \mathscr{C}(I)$, f è strettamente monotona $\Rightarrow$ f^{-1} è strettamente monotona e continua
(implica che ci sia l'inversa e che)

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO: Sia $g = f^{-1}$ g è strettamente monotona ed invertibile (in quanto inversa)

Se per assurdo g non è continua, essendo monotona, ha una discontinuità a salto. l'immagine di g quindi non è intervallo (c'è un buco)
le ordinate che corrispondono al $D f$ essendo $g = f^{-1}$

Dimostrata per assurdo $\to$ l'immagine di $g = I$. Dicendo che l'immagine di g quindi non è un intervallo, è come se dicessimo che un intervallo non è un intervallo

Per valori in
Se $f : (a;b) \Rightarrow \mathbb{R}$ monotona allora $\forall c \in (a;b)$ $\exists \lim_{x \to c^-} f$ $\lim_{x \to c^+} f$ Se sono uguali, f è continua altrimenti c'è discontinuità a salto.

ALTRI LIMITI NOTEVOLI $\to$ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

$\bar{x} \in \bar{\mathbb{R}}$

INFINITO $\to$ Si dice infinito per $x \to \bar{x}$ ogni funzione $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \pm\infty$
INFINITESIMO $\to$ si dice infinitesimo per $x \to \bar{x}$ ogni funzione $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = 0$
| $f(x) = x^2$ è INFINITO per $x \to \pm\infty$
è INFINITESIMO per $x \to 0$

CONFRONTO TRA INFINITI $\to$ f e g sono due INFINITI $x \to \bar{x}$ | $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)/g(x) =$
$\begin{cases} \nexists & \text{infiniti non confrontabili} \\ L \neq 0 & \text{infiniti dello stesso ordine} \\ \infty & f \text{ è un infinito di ordine superiore } \partial f > \partial g \\ 0 & f \text{ è un infinito di ordine inferiore } \partial g > \partial f \end{cases}$

CONFRONTO TRA INFINITESIMI: f e g sono due INFINITESIMI $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)/g(x) =$
$\begin{cases} \nexists & \text{infinitesimi non confrontabili} \\ L \neq 0 & \text{infinitesimi dello stesso ordine} \\ \infty & f \text{ è infinitesimo di ordine inferiore } \partial f < \partial g \\ 0 & f \text{ è un infinitesimo di ordine superiore } \partial f > \partial g \end{cases}$

INFINITO O INFINITESIMO CAMPIONE $\to$ f è un infinito o infinitesimo, $c(x)$ è un infinito o infinitesimo campione
$\exists \alpha > 0$: $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{[c(x)]^\alpha} = L$ finito, $L \neq 0$ si dice che f è un infinito o infinitesimo di ordine α rispetto a $c(x)$

	$x \to \infty$	$x \to 0$	$x \to c$ $(-1; 3; \pi; 2)$
INFINITO CAMPIONE STANDARD	x	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{0} = \infty$	$\frac{1}{x-c}$
INFINITESIMO CAMPIONE STANDARD	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{\infty} = 0$	x	$(x - c)$

ASINTOTICO → si dice asintotico se il limite del rapporto è 1 → vanno a 0 o a $\pm\infty$ con f e g
$\sim$ la stessa velocità. $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)/g(x) = 1$ $f(x)$ è asintotica a $g(x)$ $f(x) \sim g(x)$

Es. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\sin x \sim x$

TRASCURABILE → si dice trascurabile se il limite del rapporto è 0 si indica con σ
σ $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)/g(x) = 0$ $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ $f(x) = \sigma(g(x))$

Es: $\lim_{x \to \infty} f(x) = x^4 + \sin x$ $\sin x = \sigma(x^4)$

PROPRIETÀ → $x \to \bar{x}$ $f(x) \sim g(x)$, $h(x) \sim K(x)$ allora $f(x) \cdot h(x) \sim g(x) \cdot K(x)$ $\frac{f(x)}{h(x)} \sim \frac{g(x)}{K(x)}$

grazie al teorema di cambio di variabili $\square \xrightarrow{\text{tende}} 0$
$\sin\square \sim \square$ $1-\cos\square \sim \frac{\square^2}{2}$ $e^{\square}-1 \sim \square$ $\ln(1+\square) \sim \square$ $(1+\square^{\alpha})-1 \sim \alpha\square$

$e^x - 1 \sim \underbrace{x}$ → parte principale, l'unica presa in considerazione. Es. $\lim_{x \to 0} \sin(x^2) \sim x^2$

ASINTOTICI → $\sim$ → SI COMPORTA COME: $\square \to 0$

$e^{\square}-1 \sim \square$
$\sin\square \sim \square$
$1-\cos\square \sim \frac{\square^2}{2}$ $\cos\square - 1 \sim -\frac{\square^2}{2}$
$\ln(1+\square) \sim \square$
$(1+\square^{\alpha})-1 \sim \alpha\square$
$\tan\square \sim \square$

TRASCURABILE → σ → $f(x) \overset{x \to \bar{x}}{\sim} g(x)$ equivale a dire $f(x) = g(x) + \sigma(g(x))$
per definizione $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma(x)}{x} = 0$ è qualcosa di trascurabile e più piccolo di $g(x)$

Prendiamo sempre l'esponente più piccolo $\left[\ \lim_{x \to 0} x^3 + x^5 \sim x^3\right.$
↑ va più rapidamente a 0. Più una potenza è grande, più è trascurabile rispetto alla potenza di grado inferiore.

REGOLE: $\forall \alpha \cdot \sigma(\lambda x^{\alpha}) = \lambda\sigma(x^{\alpha}) = \sigma(x^{\alpha})$ → ci interessa solo l'esponente, non i coefficienti
$0 < \alpha < \beta$ $\sigma(x^{\alpha}) \pm \sigma(x^{\beta}) = \sigma(x^{\alpha})$ è il più piccolo esponente
$\sigma(x^{\alpha}) \pm \lambda x^{\beta} = \sigma(x^{\alpha})$ $-\sigma$ oppure $+\sigma$ non cambia nulla
$\sigma(x^{\alpha}) \pm \sigma(x^{\alpha}) = \sigma(x^{\alpha})$
$\sigma(x^{\alpha}) \cdot x^{\beta} = \sigma(x^{\alpha+\beta})$ andrà a 0 più velocemente di $\sigma(x^3) \cdot x^2 = \sigma(x^5)$
$\sigma(x^{\alpha}) \cdot \sigma(x^{\beta}) = \sigma(x^{\alpha+\beta})$

INFINITO O INFINITESIMO CAMPIONE

	$x \to \infty$	$x \to 0$	$x \to c$ $(1; \pi; 2)$
INFINITO CAMPIONE STANDARD	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-c}$
INFINITESIMO CAMPIONE STANDARD	$\frac{1}{x}$	x	$x-c$

IMMAGINE DI UNA FUNZIONE: è l'insieme dei valori assunti da una funzione sul proprio dominio, ed è quindi contenuta nell'insieme di arrivo della funzione (codominio), con il quale può al più coincidere.

$f(x)$ = controimmagine (dominio) x
immagine (codominio) y

FUNZIONE DERIVABILE: Data una funzione $f:(a;b) \to \mathbb{R}$ (funzione definita in a, b che ha valori in $\mathbb{R}$). f si dice derivabile in $x \in (a,b)$, se esiste il limite del rapporto incrementale $\lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Se è derivabile, allora la retta

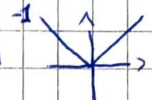
$f'(x)$ $\quad f'(a,b) \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto f'(x)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è la retta tangente al grafico in corrispondenza di x_0. Associa ad ogni x la sua derivata in quel punto.

Se esiste il limite finito destro o sinistro, avremo la derivata destra o sinistra. Se f è derivabile, i due limiti coincidono.

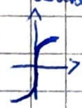
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ: Se f è continua ma NON derivabile

PUNTO ANGOLOSO/ANCORATO $\to$ $\exists f'_+(x)$, $\exists f'_-(x)$ sono diverse $\to x_0$ punto angoloso. Es. $f(x) = |x|$



nell'origine non è derivabile

FLESSO A TANGENTE VERTICALE $\to \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ (il limite non è finito) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



CUSPIDE $\to \lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \underset{(-\infty)}{+\infty} \wedge \lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \underset{(+\infty)}{-\infty}$ Es. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

TEOREMA $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0. NON VALE IL VICEVERSA

DIMOSTRAZIONE $\to h \to 0$, $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h \xrightarrow{h\to0} f'(x_0)\cdot h$

$\lim_{h\to0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h\to0} f'(x_0)\cdot h = 0 \Rightarrow f(x_0+h) \xrightarrow{h\to0} f(x_0)$ (funzione continua)

OSSERVAZIONE $\to$ Se f è derivabile in x_0 $\quad f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + o(h)$ perché $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)$
$\quad f'(x_0)\cdot h + h\cdot o(1)$

ALGEBRA DELLE DERIVATE $\to f(a;b) \to \mathbb{R}$, derivabile in x_0

$[f \pm g]' \Rightarrow f' \pm g'$ $\to$ dimostrazione $\to \frac{f(x_0+h) \pm g(x_0+h) - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \pm \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ (Tende f', Tende g')

$[f\cdot g]' \Rightarrow f'g + fg'$ $\to$ dimostrazione $\to \frac{1}{h}\{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)\} = \frac{1}{h}\{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)\} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{\text{Tende a } g}{g(x_0+h)} + \frac{f(x_0)g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \xrightarrow{\text{Tende}} f'g + f\cdot g'$

$\left[\frac{f}{g}\right]' \Rightarrow \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\to$ dimostrazione $\to \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right\} = \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h\cdot g(x_0+h)\cdot g(x_0)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$\to \left[\frac{f}{g}\right]' = \left[f\cdot\frac{1}{g}\right]' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{-g'}{g^2}\right) \Rightarrow \frac{f'g - fg'}{g^2}$

TEOREMA DELLA CATENA $\to f(a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad g(c,d) \to \mathbb{R}$ $\to$ derivata di una composta
immagine $f \leq (c,d)$ $\quad g\circ f:(a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad$ se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$
g è derivabile in $y_0 \in (c,d)$ $\quad y_0 = f(x_0)$
allora $\underset{\text{composta}}{g\circ f}$ è derivabile in x_0 $[g\circ f]'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE: $f(x_0+h) - f(x_0) = K$ $\quad f(x_0+h) = K + f(x_0) = K + y_0$
se $h\to0 \Rightarrow K\to0$

$= \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(K+y_0)-g(y_0)}{h} = \frac{g'(y_0)\cdot K + K\,o(1)}{K}\cdot\frac{K}{h}$

$g(K+y_0) - g(y_0) \overset{K\to0}{\sim} g'(y_0)\cdot K = g'(x_0)K + K\,o(1)$

$= \frac{g'(y_0)\cdot \cancel{K} + \cancel{K}\cdot o(1)}{\cancel{K}} \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[\text{Tende}]{h\to0} g'(y_0)\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

LA DERIVATA DI UNA COMPOSTA È RICORSIVA $\to [h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$

Tabella delle principali derivate utilizzate nelle scuole medie superiori

Funzione	Derivata
2^x	$2^x \ln 2$
y = costante	y' = 0
y = x	y' = 1
$y = x^n$	$y' = n\, x^{n-1}$
$y = \frac{1}{x^2}$	$y' = -\frac{2}{x^3}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = 1 / 2\sqrt{x}$
y = senx	y' = cosx
y = cosx	y' = - senx
y = tangx	$y' = 1/\cos^2 x$ oppure $y' = 1 + \tan^2 x$
y = cotgx	$y' = -1/\text{sen}^2 x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \log a$
y = log x	y' = 1/x
$y = \log_a x$	$y' = 1 / (x \log a) =$ $(\log_a e) / x$
y = arcsen x	$y' = 1 / \sqrt{(1 - x^2)}$
y = arccosx	$y' = -1 / \sqrt{(1 - x^2)}$
y = arctang x	$y' = 1 / (1 + x^2)$
y = arcctgx	$y' = - 1 / (1 + x^2)$
$y = 1/x$	$y' = -1/x^2$

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

SOMMA E SOTTRAZIONE

$D(f(x) + g(x)) = Df(x) \pm D\, g(x)$

Es: $D(x^7 + 5x^4 + e^x + \ln x) \rightarrow 7x^6 + 20x^3 + e^x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^{-1}$

$\Rightarrow -1x^{-2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2}$ $f''(x)$

$\Rightarrow$

$2x^{-3}$ $f'''(x)$

MOLTIPLICAZIONE

$D(f(x) \cdot g(x)) = (D(f(x)) \cdot g) + (f \cdot (D(g(x))))$

Es $D(x^3 e^x) = (3x^2 \cdot e^x) + (x^3 e^x) = x^2 e^x (3 + x)$ $\Rightarrow$ FATTORE TOTALE

DIVISIONE

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df \cdot g) - (f(Dg))}{g^2}$$

Es $$D\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3-2}\right) = \frac{((2x+3+0)(x^3-2)) - ((x^2+3x+1) \cdot (3x^2-0))}{(x^3-2)^2} \Rightarrow \frac{2x^4 - 4x + 3x^3 - 6 - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2}{(x^3-2)^2}$$

$$\frac{-x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 4x - 6}{(x^3-2)^2}$$

DERIVATE DI F COMPOSTE

$\sin(\ln(5x^3 + 10x^2 + 1)) =$

$D'(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$D(h(f(g(x)))) \Rightarrow f'(f(g(x))) \cdot f'(g(x)) \cdot g(x)$

$$D(\sin(\ln(5x^3+10x^2+1))) = \cos(\ln(5x^3+10x^2+1)) \cdot \frac{1}{5x^3+10x^2+1} \cdot 15x^2 + 20x \Rightarrow \frac{15x^2+20x}{5x^3+10x^2+1} \cdot \cos(\ln(5x^3+10x^2+1))$$

DERIVATE DI GRADO SUP. AL SECONDO

$y = x^4 + 3x^2 + 2x + 1$

$y' = 4x^3 + 6x + 2$

$y'' = 12x^2 + 6$

$y''' = 24x$

$y^{IV} = 24$

$y^{V} = 0$

TRIGONOMETRICHE SONO CICLICHE

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

$y''' = -\cos x$

$y^{IV} = \sin x$

$y = \ln x$

$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$y'' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$y''' = +2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

Arrivano a 0 quando sono di grado superiore a quello del polinomio.

TEOREMA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA $f(a,b)\to\mathbb{R}$ continua e invertibile $g=f^{-1}$

$g: f(a;b)\to\mathbb{R}$, Se f derivabile in $x_0\in(a,b)$ e $f'(x_0)\neq 0$ allora g é derivabile in $y_0=f(x_0)$ $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ $\quad g(f(x))=x \Rightarrow g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)=1 \Rightarrow g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

DIMOSTRAZIONE: $f(x_0)=y_0$ $\quad g(y_0)=x_0$ $\quad f(x_0+h)=y_0+K$ $\quad g(y_0+K)=x_0+h$

$K\neq 0 \Rightarrow h\neq 0$ $\quad K\to 0\Rightarrow h\to 0$

$$\frac{g(x_0+K)-g(y_0)}{K} = \frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \Rightarrow \lim_{K\to 0}\frac{g(y_0+K)-g(y_0)}{K}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

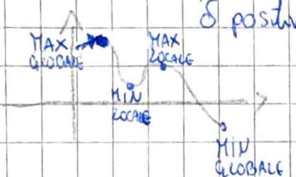
DERIVATE FONDAMENTALI → $K'=0$ (derivata di costante $=0$) $\quad (x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ $\quad (e^x)'=e^x$ $\quad \sin x = \cos x$

MASSIMO ASSOLUTO → $f: I\to\mathbb{R}$, M é max assoluto di f in I, $x_0\in I$ é il punto di max assoluto se $M=f(x_0)\geq f(x)$ $\forall x\in I$. Un punto di max assoluto é anche punto di max locale.

MASSIMO LOCALE → $f: I\to\mathbb{R}$. M é max locale di f $x_0\in I$ é il punto di max locale se esiste un δ positivo per cui $M=f(x_0)\geq f(x)$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I$ (intorno di x_0)

MINIMO ASSOLUTO → $f: I\to\mathbb{R}$, m é min assoluto di f in I, $x_0\in I$ é il punto di min assoluto se $m=f(x_0)\leq f(x)$ $\forall x\in I$

MINIMO LOCALE → $f: I\to\mathbb{R}$, m é min locale di f, $x_0\in I$ é il punto di min locale se esiste un δ positivo per cui $m=f(x_0)\leq f(x)$ $\forall x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)\cap I$ (intorno di x_0)



TEOREMA DI FERMAT → $f(a,b)\to\mathbb{R}$ se
- x_0 é un punto estremo locale
- f é derivabile in x_0, allora

$\Big\}\ f'(x_0)=0$

DIMOSTRAZIONE x_0 max locale $f(x)\leq f(x_0)$

1ª ipotesi:
$$\begin{cases} \text{se } h>0 & \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0 \to \text{per Teor. permanenza segno} \Rightarrow \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0 \Rightarrow f'_+(x_0)=0 \\ \text{se } h<0 & \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0 \Rightarrow f'_-(x_0)=0 \end{cases}$$

Se f é derivabile, derivata destra e sinistra coincidono $f(x_0)=f'_+(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=0$

Se $f'(x_0)=0$, x_0 é un punto critico (dove si annulla la derivata). Una derivata può annullarsi anche negli estremi o dove non esiste la derivata.

Se $f'(x_0)=0$, non implica che x_0 sia max o min. Es. $f(x)=x^3$ $\quad f'(x)=3x^2$ la derivata in 0 vale 0, ma non la max/min

TEOREMA LAGRANGE: $f\in\mathcal{C}[a,b]$ e derivabile in (a,b) $\Rightarrow \exists c\in(a,b)$: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

c dove si annulla la funzione

DIMOSTRAZIONE: $W(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right]$

$W\in\mathcal{C}$ in $[a,b]$ ed é derivabile in (a,b)

$W(a)=W(b)=0$ $\quad\exists M, m$ max e min assoluto di W (perché l'intervallo é chiuso)

- Se $M=m$ $\quad W(x)=cost$ $\quad W(x)=0$ $\quad\forall x \Rightarrow W'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ $\quad\forall x$
- Se $M>m$ nei due estremi la funzione ha lo stesso valore, uno dei due é interno $\to \bar{x}$
  - $\bar{x}$ é estremo assoluto (quindi locale)
  - f é derivabile in $\bar{x}$

  $\Big\}$ TEOREMA FERMAT $\Rightarrow W'(\bar{x})=0$

$$W'(\bar{x})=f'(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=0$$

$\bar{x}=c$ (punto dove si annulla la funzione)

CONSEGUENZA → TEOREMA TEST DI MONOTONIA → I intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ $f \in \mathcal{C}(I)$, f derivabile in (I)
- f é crescente $\iff f'(x) \geq 0 \ \forall x$
- f é decrescente $\iff f'(x) \leq 0 \ \forall x$

DIMOSTRAZIONE: f é crescente $\iff f'(x) \geq 0$ dimostriamo che se f é crescente, $f'(x)$ é ≥ 0

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $h>0$ se f é crescente $f(x_0+h) > f(x_0)$ e quindi la frazione é positiva
$h<0$ se f é decrescente $f(x_0+h) < f(x_0)$ e quindi la frazione é positiva

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

dimostro che se $f'(x) \geq 0$ allora é crescente

$x_{1,2} \in I$ $x_1 < x_2$ $\exists c \in (x_1, x_2): \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

COROLLARIO $f: I \to \mathbb{R}$ f costante $\iff f'(x) = 0 \ \forall x$

Esempio: $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{composta}} = 0 \ \forall x$ $\mathcal{D}: (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$

La f per essere costante, deve essere definita in un intervallo, questa funzione é continua in ciascuno degli intervalli, ma ha costanti diverse.

TEOREMA DEL TAPPABUCHI $f(a;b) \to \mathbb{R}$ continua in (a,b) e derivabile in (a,b), salvo al più $x_0 \in (a,b)$

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L \Rightarrow f$ é derivabile in x_0, $f'(x_0) = L \to$ finito

DIMOSTRAZIONE → $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-(x_0)}$ → LAGRANGE $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0+\lambda h)$ $\lambda \in (0;1)$

$h \to 0 \Rightarrow x_0 + \lambda h \to x_0$ $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(x_0+\lambda h) = L$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x + 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(\cos x + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = \nexists$ perché non c'é lim $\cos\frac{1}{x}$

É derivabile nell'origine? Usiamo il limite del rapporto incrementale applicato alla traccia

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)+f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h + h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin h}{h} + \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h}\right) = 1$$

É derivabile nell'origine ma non é continua, il fatto che f sia derivabile, non garantisce che sia continua

Se $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \Rightarrow f' \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ Esempio $f(x) = x^3 + 4x^2$ $\mathcal{D} = \forall x \in \mathbb{R}$ é continua in tutto $\mathbb{R}$

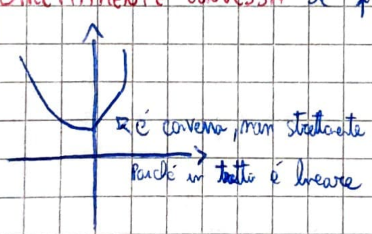
$f'(x) = 3x^2 + 8x$ $\mathcal{D} = \forall x \in \mathbb{R}$ " " $f \in \mathcal{C}'(\mathcal{D})$

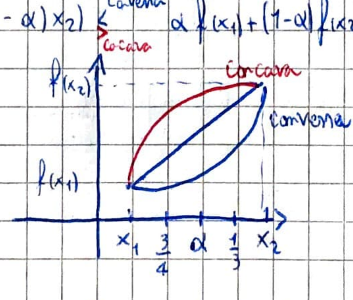
$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}) \to$ significa che tutte le derivate sono continue nel dominio.

CONVESSITÁ I intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ Convessa = concavitá verso l'alto Concava = concavitá verso il basso

Se $x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \underset{\text{convessa}}{\overset{\text{concava}}{\gtreqless}} \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ $\forall \alpha \in [0;1]$

STRETTAMENTE CONVESSA Se $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \underset{\text{concava}}{\overset{\text{convessa}}{<}} \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ $\forall \alpha \in (0;1)$





Presi due punti del grafico e uniti con una linea, tutto ció che é al di sotto deve essere rivolto verso l'alto (CONVESSA) o verso il basso (CONCAVA)

TEOREMA: Se f é convessa (concava) in $I \Rightarrow f$ é continua in tutto I, salvo al più gli estremi.
In ogni punto interno possiede derivata destra e sinistra (potrebbe avere dei punti angolosi e quindi può non avere la derivata ovunque, ma ha sempre quella destra e sinistra)

TEOREMA: $f(a;b) \to \mathbb{R}$ • f é derivabile in $(a;b)$
• dire che f é convessa in $(a;b) \Leftrightarrow f'$ é crescente in $(a;b)$
• dire che f é concava in $(a;b) \Leftrightarrow f'$ é decrescente in $(a;b)$
• Se f é derivabile 2 volte in $(a;b)$: • dire che f é convessa in $(a;b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a;b)$
• dire che f é concava in $(a;b) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a;b)$

PUNTO DI FLESSO $f(a;b) \to \mathbb{R}$ $x_0 \in (a;b)$ punto di derivabilità per f $\exists f'(x_0)$ oppure $f'(x_0) = \pm\infty$
Lo dove cambia la concavità
Lo si dice "punto di flesso" per f, se $\exists \delta > 0$: • f é convessa in $(x_0-\delta; x_0)$
• f é concava in $(x_0; x_0+\delta)$
o viceversa.

TEOREMA $\left.\begin{array}{l} x_0 \text{ punto di flesso per } f \\ \exists f'' \end{array}\right\} \Rightarrow f''(x_0) = 0$
$\Leftarrow$ il viceversa non vale Es. $f(x) = x^4$, $f'(x)\ 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$
$f''(0) = 0 \to$ ma all'origine non c'é nessun flesso, anzi la $f(x)$ é convessa

TEOREMA DI DE L'HOPITAL $\to f, g$ funzioni derivabili in $(a;b)$: $g, g' \neq 0$ in $(a;b)$
Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ oppure ∞

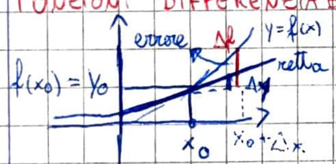
Se esiste $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ (Può essere $\pm\infty$) $\Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ← Non vale il contrario

Il limite delle funzioni $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ posso calcolare il limite, calcolando il limite delle derivate

Es $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\cos x}{5x+\sin x} = \frac{3}{5}$ $\partial f = \partial g$ APPLICHIAMO DE L'HOPITAL $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{f'}{3-\sin x}}{\underset{g' \text{ derivata}}{5+\cos x}} \nexists$

Es $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} \overset{H}{=} \lim_{x\to a} \frac{\cos x}{1} = \cos a$

FUNZIONI DIFFERENZIABILI →



f continua
retta $y = y_0 + m(x-x_0)$

$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ $\quad \Delta y = m\Delta x$
ERRORE $= \Delta f - \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - m\Delta x$
$\lim_{\Delta x\to 0} \text{errore} = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f - \Delta y = 0$

Se Δx é un infinitesimo, allora anche l'errore é un infinitesimo
$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\text{errore}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - m\Delta x}{\Delta x} = m$
$= \lim_{\Delta x\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{derivata}} - m = f'(x_0) - m$
se f é derivabile in x_0

Se f é derivabile in x_0 • se m é $\neq f'(x_0)$, l'errore e Δx sono infinitesimi dello stesso ordine
• se $m = f'(x_0) \Rightarrow$ l'errore é infinitesimo di ordine maggiore rispetto a Δx errore $= o(\Delta x)$

Definizione $f(a;b) \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in (a;b)$, se $\exists\, m$: $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - m\Delta x}{\Delta x} = 0$
esiste una retta tangente che lo approssima meglio delle altre.

TEOREMA f é differenziabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ derivabile in x_0 Se $\Delta x \to dx \Rightarrow \Delta f \simeq \Delta y$ $\quad df(x_0) = f'(x_0)dx$

Se f é derivabile in x_0, tra tutti i polinomi di primo grado $P_1(x) = mx+q$. L'approssimazione migliore la otteniamo se $\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) \to mx+q = f(x_0) \\ P_1'(x_0) = f'(x_0) \to m = f'(x_0) \end{cases}$ $\Rightarrow P_1(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$\left.\frac{d^n}{dx^m} \Rightarrow \frac{(x-x_0)^n}{n!}\right|_{x=x_0} \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n\neq m \end{cases}$

esiste ed è unico

TEOREMA → data f, derivabile n volte in x_0 $\exists!$ polinomio $T_{n,x_0}(x)$, grado $\leq n$, che ha in comune con $f(x)$ i valori di tutte le derivate fino all'ordine n in $x = x_0$

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

POLINOMIO DI TAYLOR → centrato in x_0 di grado n
tutti i coeff sono la derivata della funzione.

↳ polinomio di grado n, centrato in x_0, di x.

Se il polinomio di TAYLOR è centrato nell'origine $(x_0 = 0)$ → POLINOMIO DI MAC LAURIN

$x_0 = 0$ $\quad T_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\cdot\frac{(x-0)^2}{2!} + \dots + f^{n}(0)\cdot\frac{(x-0)^n}{n!}$

Esempio MAC LAURIN, ordine 3 $\quad f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = \cos 0 = 1 \quad f''(0) = -\sin 0 = 0 \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1$

MAC LAURIN $\quad T_{3,0} = 0 + 1\cdot(x-0) + 0\cdot\frac{(x-0)^2}{2!} - 1\frac{(x-0)^3}{3!} \Rightarrow x - \frac{x^3}{3!}$

SVILUPPO DI TAYLOR → $f(x) = T_{n,x_0}(x)$ + resto → Peano (descrizione qualitativa)

RESTO SECONDO PEANO

T: $f(a;b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a;b)$ allora $f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{o(x-x_0)^n}_{\text{resto}}$

Esempio $x_0 = 0$, $n = 2$ $\quad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

f derivabile 2 volte in $x = 0$

DIMOSTRO: dobbiamo far vedere che $\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2}}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}^{\to\, o(x)}}{2x} = 0$

f' è derivabile in 0, $\quad g$ derivabile in x_0: $g(x_0+h) - g(x_0) = g'(x_0)h + o(h)$ ← definizione

$x_0 = 0, h = x \quad g(x) - g(0) = g'(0)x + o(x) \qquad g = f'(x) \quad f'(x) - f'(0) = f''(0)x + o(x)$

RESTO SECONDO LAGRANGE → $f(x) = T_{n,x_0}(x)$ + resto → Lagrange (descrizione quantitativa)

SVILUPPO DI TAYLOR

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$ $\quad f$ è derivabile $n+1$ volte in $[a;b]$

allora $\exists\, c$ tra x_0 e x: $f(x) = T_{n,x_0}(x) + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

derivata $n+1$ esima

DIMOSTRAZIONE $\quad x_0 = a,\ x = b,\ n = 1$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2!}$$

$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = K(b-a)^2$ → deve essere $f''(c)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}$

$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - K(b-x)^2 \qquad g(b) = 0, \quad g(a) = 0$

sostituiamo la "a" con le x

Se metto b al posto di x

poiché K deve verificare l'uguaglianza

$\exists\, c: g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow g'(x) = \cancel{-f'(x)} + \cancel{f'(x)} - f''(x)(b-x) + 2K(b-x)$

$g'(c) = -f''(c)\cdot(b-c) + 2K(b-c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f''(c)}{2}$

NON CONOSCEREMO MAI c, quindi non sapremo mai quanto vale l'errore.

ESERCIZIO 1 - ESEMPIO

CONTINUITÀ f continua in $x_0 \in Df$ se esiste finito (è continua a meno che non si formano delle forme indeterminate)

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$$f(x) = \begin{cases} b\log(1-x) & x<0 \\ ax+b & 0 \leq x \leq 2 \\ e^{x-2}+a & x>2 \end{cases} \qquad Df = \mathbb{R} \quad \begin{bmatrix} 1-x>0 \\ x<1 \end{bmatrix}$$

f è continua per $x<0 \lor 0<x<2 \lor x>2$ (Somma o composizione di funzioni continue)

$x_0 = 0 \quad f(0) = b \quad \lim_{x \to 0^-} b\log(1-x) = 0 \quad \lim_{x \to 0^+} ax+b = b \Big\} b=0$

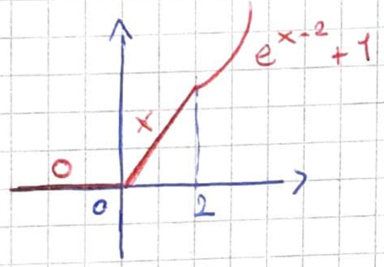
Se $b=0$ f è continua in $x_0 = 0$

leggermente minore di 0, quindi $x<0$: $b\log(1-x)$

$x_0 = 2 \quad f(2) = 2a+b \quad \lim_{x \to 2^+} e^{x-2}+a = 1+a \quad \lim_{x \to 2^-} ax+b = 2a+b \begin{cases} 2a+b = 1+a \\ a+b=1 \end{cases}$ f è continua in $x_0 = 2$

f è continua su $\mathbb{R}$ $\begin{cases} b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$ $\quad b=0 \quad a=1$

$$\boxed{f(x) \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ e^{x-2}+1 & x>2 \end{cases}}$$



DERIVABILITÀ f è derivabile in $x_0 \in Df$ se esiste finito

limite rapporto incrementale = derivata $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} b\log(1-x) & x<0 \\ ax+b & 0 \leq x \leq 2 \\ e^{x-2}+a & x>2 \end{cases}$$

f è derivabile in $x<0 \lor 0<x<2 \lor x>2$

$x_0 = 0 \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h}$

Se $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} 0 = 0$ (Non è F.I. funzione costante che ha valore 0)

Se $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$ non è derivabile perché i due limiti non sono uguali

$x_0 = 2 \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - 2}{h}$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2+h-2}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^h - 2}{h} = \mp\infty$

f non è derivabile (i limiti destro e sinistro sono diversi)

derivata

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 0 & x<0 & x \neq 0 \\ 1 & 0<x<2 & x \neq 2 \\ e^{x-2} & x>2 \end{cases}}$$

Test di monotonia $f'(x) > 0$ $\forall x \in (0;2)$, $\forall x > 2$

$\downarrow$

f crescente

ESERCIZIO 2

valore assoluto

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{x} & x > 0 \\ x\ln(1+x) + e^x & x \leq 0 \to -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

$1+|a\sin(x)| > 0$

$D_f = (-1;+\infty)$ $1+x > 0$

$x > -1$

CONTINUITÀ $\to$ f continua per $x < 0$ (composizione di funzioni continue: $\ln$, x, e^x sono continue) e $x > 0$ (è composta da funzioni continue)

$f(0) = 1 \to \ln 1 + e^0 = 1$

$x_0 = 0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln\left(\dfrac{1+|a\sin(x)|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{|a\sin(x)|}}_{\text{tende a } 1} \cdot \dfrac{|a\sin(x)|}{x}$

maggiore di 0

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1 \cdot |a\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^+} |a| \underbrace{\dfrac{\sin(x)}{x}}_{\to \text{ tende a } 1} = |a|$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\ln(1+x) + e^x = 1$

f è continua in $x_0 = 0$ se $|a| = 1 \to a = +1 \lor a = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{x} & x > 0 \\ x\ln(1+x) + e^x & x \leq 0 \end{cases}$$

f è continua sul D_f

Derivabilità $\quad$ f è derivabile per $x < 0$

$x < 0$ $\quad f'(x) = \underbrace{\ln(1+x) + x \cdot \dfrac{1}{1+x}}_{\text{derivata del prodotto } x\ln(1+x)} + e^x$

per $x > 0$ $\sin(x) = 0$ $\quad x = k\pi \to$ punti da studiare per la sua derivata

Calcolo derivata per esercitarci:

$f(x) = \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x} \to f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot x - \ln(1+\sin x)}{x^2} \to f'(x) = \dfrac{\frac{x\cos(x)}{1+\sin(x)} - \ln(1+\sin x)}{x^2}$

STUDI DI FUNZIONE

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{|x|-2}$$

$|x|-2 \neq 0 \quad |x| \neq 2 \quad x \neq \pm 2$

① $\mathcal{D}f: (-\infty; -2) \cup (-2, 2) \cup (2; +\infty)$

② proprietà funzione

$$f(-x) = \frac{|(-x^2-1)|}{|-|x|-2} = \frac{x^2-1}{|x|-2} = f(x) \Rightarrow \text{pari}$$

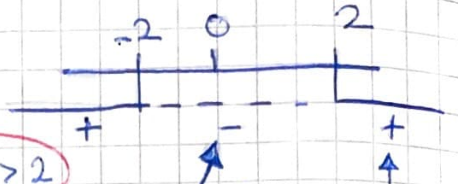
studio solo $x \geq 0$, per $x < 0$ uso la riflessione rispetto all'asse y
$\mathcal{D}f$ é simmetrico rispetto ad O(origine)

$f(x) = f(-x) \rightarrow$ pari
$f(x) = -f(-x) \rightarrow$ dispari

③ Zeri e segno di f

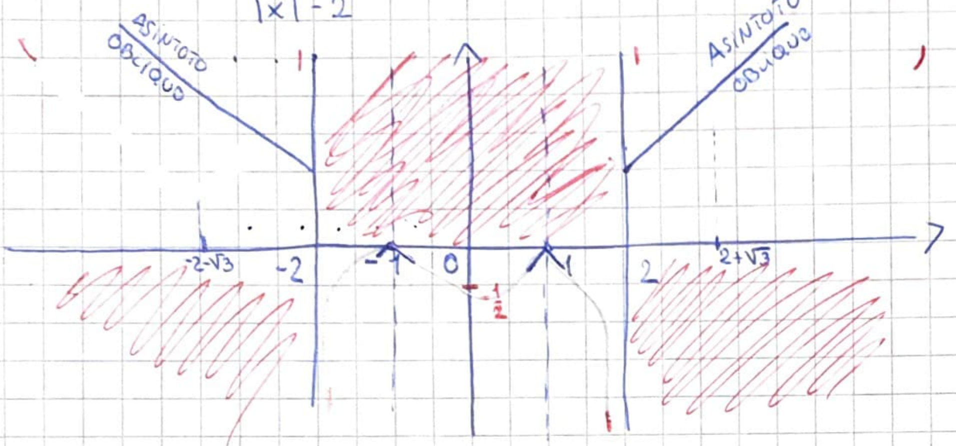
$f(x) = 0 \Rightarrow |x^2-1| = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{|x^2-1|}{|x|-2} \geq 0 \rightarrow |x|-2 > 0 \rightarrow x < -2 \vee x > 2$



$x = -1$ e $x = 1$ massimo relativo

$2+\sqrt{3}$ é un punto di minimo
$-2-\sqrt{3}$ (guardare STEP 8)



④ Limiti e continuità

f é continua su $\mathcal{D}f$ - composizione e quoziente di funzioni continue

Essendo pari, posso studiare la metà dei limiti e poi ribaltare il grafico

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}(1-\frac{1}{x^2})}{\cancel{x}(1-2/x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = +\infty$$

$x=2^+$ asintoto verticale destro

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty$$

$x=2^-$ asintoto verticale sinistro

} asintoto verticale $x=2$

⑤ Asintoto obliquo $y = mx+q$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x(x-2)} = 1$$

[se esiste $m \in \mathbb{R} \neq 0$, calcola q]

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x-2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+2x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2$$

ASINTOTO OBLIQUO $y = 1x+2$

Per la simmetria, se abbiamo anche a $-\infty$

⑥ Asintotici per gli 0 zeri $f(x)$ $x_0 = 1$ $x_0 = -1$

Per $x \to 1$, $x \to -1$

si annulla

$$\underset{x \to 1}{f(x)} = \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{|x|-2} \sim \frac{2|x-1|}{-1} = -2|x-1|$$

si annulla

$$\underset{x \to -1}{f(x)} = \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{|x|-2} \sim \frac{2|x+1|}{-1} \sim -2|x+1|$$ (Sostituisco gli zeri nella $f(x)$)

Ci dice a cosa è simile la nostra funzione nell'intorno degli 0 "zeri" (nel nostro caso ± 1 punti angolosi e non derivabili)

Non sempre è possibile calcolarli.

⑦ Derivabilità → Posso calcolarla in tutti i punti tranne $x \neq \pm 1$

$f'(x)$ per $x > 2$ $\quad f(x) = \frac{x^2-1}{x-2} \to f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2-1)}{(x-2)^2} \to f'(x) = \frac{2x^2-4x-x^2+1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

$f'(x)$ per $1 < x < 2$ $\quad f(x) = \frac{x^2-1}{x-2} \to \boxed{f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}}$

$f'(x)$ per $0 \leq x < 1$ $\quad f(x) = \frac{1-x^2}{x-2} = \frac{-2x(x-2) - (1-x^2)}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

Gli intervalli li trovo guardando il grafico. Posso anche calcolare un'unica derivata.

$$f'(x) = \frac{d(|x^2-1|) \cdot (|x|-2) - |x^2-1| \cdot d(|x|-2)}{(|x|-2)^2}$$

$$d(|x|) = \frac{x}{|x|}$$

$$d(|x^2-1|) = \frac{x^2-1}{|x^2-1|} \cdot 2x$$

$x_0 = 1$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(0)}{h}$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|(1+h)^2 - 1|}{+h-2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h^2+2h|}{h^2-2h} = -1$$ (è un infinitesimo, guardo l'esponente minore)

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|(1+h)^2 - 1|}{-h-2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h^2+2h|}{-h^2-2h} = 1$$ ANALOGO AL PUNTO ⑤

PUNTO DI NON DERIVABILITÀ

Siccome è pari, è analogo anche con $x_0 = -1$

⑧ Punti stazionari $f'(x) = 0$ $\quad \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} = 0 \quad , \quad \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

Ne guardo solo 1 perché si comportano nello stesso modo

$x^2-4x+1=0$

$x^2-4x+4=3$

$(x-2)^2 = 3 \to x = 2+\sqrt{3}$ minimo

$x = 2-\sqrt{3}$

per la simmetria pari della funzione, anche $-2-\sqrt{3}$ é un minimo

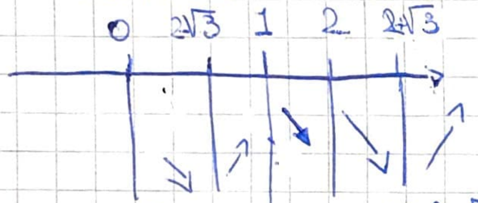
⑨ Monotonia $f'(x) \geq 0 \to f$ é crescente

$0 < x < 1$

$1 < x < 2$

$x > 2$

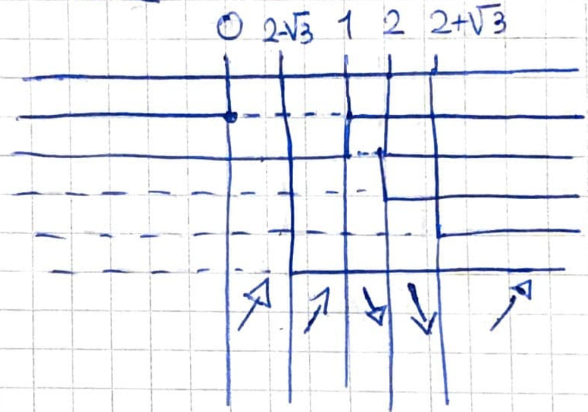
$0 \leq x < 2 \qquad x > 2$



$x = 0$ minimo

poiché é pari e quindi devo ribaltarla dall'altro lato

$x = 2+\sqrt{3}$ minimo



$f(x) = x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2}$

① Dominio $|x| \neq 0$ $\forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

② PROPRIETÀ

$f(-x) = -x\sqrt[3]{(\ln|-x|)^2} = -x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = -f(x)$ dispari $\to$ simmetrica rispetto all'origine
studio solo $x > 0$

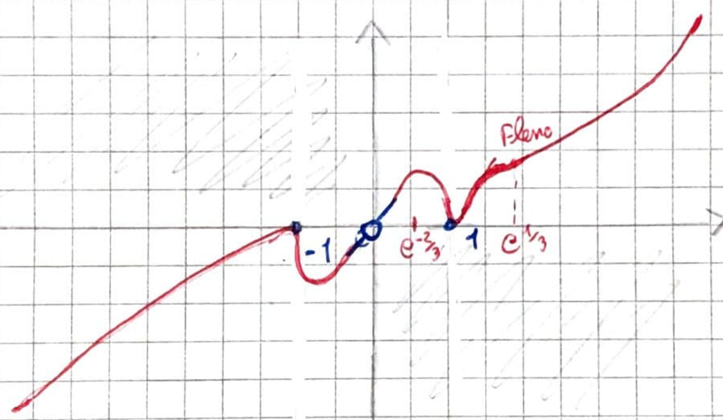
③ Studio zeri e segni

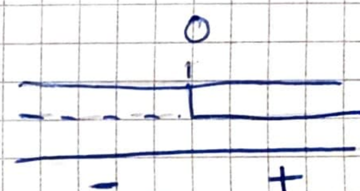
$f(x) = 0$ $x = 0$ $\vee$ $\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = 0 \to e^{\ln|x|} = e^0 \to |x| = 1 \to x = \pm 1$

$x=0$ non accettabile fuori dal dominio

$f(x) \geq 0$ $x > 0$

$\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (c'è il quadrato)





$x = 1$ minimo relativi
$x = -1$ massimo

④ Limiti e continuità f è continua in $\mathbb{R} - \{0\} \to$ nel suo dominio (composizione f continua)

$\lim_{x \to +\infty} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln(x)^{-2/3}} = 0^+$

$\ln 0 = -\infty$
$(\ln 0)^2 = +\infty$
tende a 0^+

f è prolungabile per continuità in $x = 0$

$f = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f è continua in 0

⑤ Asintoti obliqui $y = mx + q$

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{(\ln|x|)^2}}{\cancel{x}} = +\infty$ (non ci sono asintoti obliqui) né a $+\infty$ né a $-\infty$

~~derivabilità~~

$\cancel{f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln(x))^2} & x > 0 \\ -x\sqrt[3]{\ln(-x)^2} & x < 0 \end{cases}}$

⑥ Asintotici per gli 0 zeri $x_0 = 1$ $x_0 = -1$

$x_0 = 1$ $f(x) = x\sqrt[3]{(\ln(x))^2} \sim \sqrt[3]{(\ln(x))^2} \sim (x-1)^{2/3}$
per $x \to 1$

$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) = \ln[1 + (x-1)] \sim (x-1)$

Analogo per $x_0 = -1$

(7) Derivabilità $f(x) \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln(x))^2} & x>0 \\ x\sqrt[3]{(\ln(-x))^2} & x<0 \end{cases}$

Cuspide, poiché tendono ad ∞ con lo stesso segno. Punti di non derivabilità

$$f'(x) = \sqrt[3]{(\ln|x|)^2} + \cancel{x}\,\frac{2}{3}(\ln(x))^{-1/3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \sqrt[3]{(\ln|x|)^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\ln(x)}} = \boxed{\frac{\ln(x)+2/3}{\sqrt[3]{\ln(x)}}} \quad x>0$$

Dominio di f': $\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} \neq 0 \to e^{\ln|x|} \neq e^0 \to |x| \neq e^0 \to |x| \neq 1 \to x \neq \pm 1$

Non derivabilità

$$x_0 = 1 \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{[\ln(1+h)]^2}\,(h+1) - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h+1)[\ln(1+h)]^{2/3}}{(h)^{1/3}(h)^{2/3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h+1}{h^{1/3}}\underbrace{\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]^{2/3}}_{\text{tende a } 1} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h+1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{h+1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

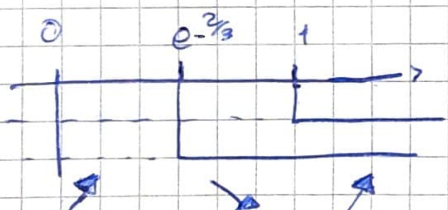
$X_0 = 1$ non derivabilità limite destro e sinistro sono diversi.

(8) Punti stazionari $f'(x)=0$ $\quad \ln(x)+\frac{2}{3} = 0 \quad e^{\ln(x)} = e^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x = e^{-2/3}$

$x = -e^{2/3}$ per simmetria

(9) Monotonia f monotona $f'(x)>0$ $\quad \frac{\ln(x)+2/3}{\sqrt[3]{\ln x}} \geq 0 \quad N\geq 0 \;\; \ln|x| + 2/3 \geq 0$

$x \geq e^{-2/3}$



$f'(x) \geq 0 \to$ crescente $\qquad D>0 \;\; e^{\ln(x)} > e^0 \Rightarrow x > e^0 \to x>1$

$x = e^{-2/3}$ massimo locale

$x = 1$ minimo locale

(10) Derivata seconda solo di $x>0$ per via della simmetria $f'(x) = \frac{\ln x + \frac{2}{3}}{\ln(x)^{1/3}}$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(x)^{1/3} - \left(\ln x + \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}[\ln(x)]^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^{2/3}}$$

$$= \frac{\ln(x) - \frac{1}{3}\ln x - 2/9}{x(\ln(x))^{4/3}} = \frac{\frac{2}{3}\ln(x) - \frac{2}{9}}{x[\ln(x)]^{4/3}}$$

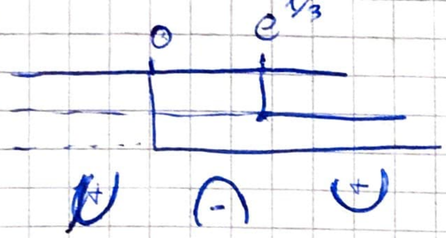
$D f''(x)$ $\quad x\neq 0 \quad e^{\ln(x)} \neq e^0 \to x \neq e^0 \to x \neq 1$ (già studiata nella derivata prima)

(11) Zeri e segni di $f'' \to$ concavità $\cap$ e convessità $\cup$ $\quad f''(x) = 0$

$\frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9} = 0 \quad e^{\ln(x)} = e^{\frac{1}{3}} \quad x = e^{1/3}$ per simmetria dispari $x = -e^{+1/3}$

$f''(x) \geq 0 \quad \frac{\frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9}}{x(\ln x)^{4/3}} \geq 0 \Rightarrow N \geq 0 \to \frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9} \geq 0 \to x \geq e^{1/3}$

$D > 0 \to x > 0$



$f''(x) \geq 0 \rightarrow f$ ha concavità verso l'alto

$f \Rightarrow x = e^{1/3}$ è un flesso (punto dove cambia la concavità)