ESERCIZIO 1 - ESEMPIO

CONTINUITÀ f continua in $x_0 \in D_f$ se esiste finito (È continua a meno che non si formano delle forme indeterminate)

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$$f(x) = \begin{cases} b \log(1-x) & x<0 \\ ax+b & 0 \le x \le 2 \\ e^{x-2}+a & x>2 \end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R} \quad \begin{bmatrix} 1-x>0 \\ x<1 \end{bmatrix}$$

f é continua per $x<0 \ \vee \ 0<x<2 \ \vee \ x>2$ (Somma o composizione di funzioni continue)

$x_0 = 0 \quad f(0) = b \quad \lim_{x \to 0^-} b \log(1-x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} ax+b = b \ \Big\} b=0$

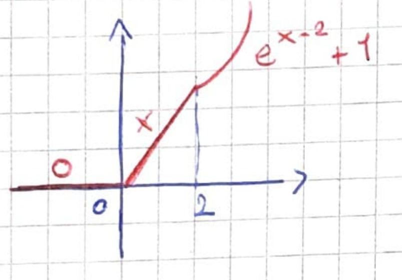
leggermente minore di 0, quindi $x<0$: $b\log(1-x)$

Se $b=0$ f é continua in $x_0=0$

$x_0 = 2 \quad f(2) = 2a+b \quad \lim_{x \to 2^+} e^{x-2}+a = 1+a \qquad \lim_{x \to 2^-} ax+b = 2a+b \ \begin{cases} 2a+b = 1+a \\ a+b = 1 \end{cases}$ f é continua in $x_0=2$

f é continua su $\mathbb{R}$ $\begin{cases} b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$ $\quad b=0 \quad a=1$

$$\boxed{f(x) \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0\le x \le 2 \\ e^{x-2}+1 & x>2 \end{cases}}$$



DERIVABILITÀ f é derivabile in $x_0 \in D_f$ se esiste finito

limite rapporto incrementale = derivata $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} b \log(1-x) & x<0 \\ ax+b & 0 \le x \le 2 \\ e^{x-2}+a & x>2 \end{cases}$$

f é derivabile in $x<0 \ \vee \ 0<x<2 \ \vee \ x>2$

$x_0 = 0 \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h}$

Se $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} 0 = \underline{0}$ (Non é F.I. funzione costante che ha valore 0)

Se $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \underline{1}$ non é derivabile perché i due limiti <u>non</u> sono uguali

$x_0 = 2 \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - 2}{h}$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2+h-2}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^h - 2}{h} = \mp\infty$

f non é derivabile (i limiti destro e sinistro sono diversi)

derivate

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 0 & x<0 & x \ne 0 \\ 1 & 0<x<2 & x \ne 2 \\ e^{x-2} & x>2 \end{cases}}$$

Test di monotonia $f'(x) > 0$ $\forall x \in (0;2)$ $\forall x > 2$

$\downarrow$

f crescente

ESERCIZIO 2

valore assoluto

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{x} & x > 0 \to \\ x\ln(1+x) + e^x & x \leq 0 \to -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D}f = (-1; +\infty)$ $1+|a\sin(x)| > 0$ $1+x > 0$ $x > -1$

CONTINUITÁ $\to$ f continua per $x < 0$ (composizione di funzioni continue; $\ln, x, e^x$ sono continue) e $x > 0$ (é composta da funzioni continue)

$f(0) = 1 \to \ln 1 + e^0 = 1$

$x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ \text{maggiore di } 0}} \ln\left(\frac{1+|a\sin(x)|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{|a\sin(x)|}}_{\text{tende a } 1} \cdot \frac{|a\sin(x)|}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 \cdot |a\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^+} |a| \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to \text{ tende a } 1} = |a|$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\ln(1+x) + e^x = 1$$

f é continua in $x_0 = 0$ se $|a| = 1 \to a = +1 \lor a = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+|a\sin(x)|)}{x} & x > 0 \\ x\ln(1+x) + e^x & x \leq 0 \end{cases}$$

f é continua sul $\mathcal{D}f$

Derivabilitá f é derivabile per $x < 0$

$x < 0$ $$f'(x) = \underbrace{\ln(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x}}_{\text{derivata del prodotto } x\ln(1+x)} + e^x$$

per $x > 0$ $\sin(x) = 0$ $x = k\pi \to$ punti da studiare per la sua derivata

Calcolo derivata per esercitarci:

$$f(x) = \frac{\ln(1+\sin(x))}{x} \to f'(x) = \frac{\frac{1}{1+\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot x - \ln(1+\sin x)}{x^2} \to f'(x) = \frac{\frac{x\cos(x)}{1+\sin(x)} - \ln(1+\sin x)}{x^2}$$

STUDI DI FUNZIONE

$f(x) = \frac{|x^2-1|}{|x|-2}$ $|x|-2 \neq 0$ $|x| \neq 2$ $x \neq \pm 2$

① $\mathcal{D}f: (-\infty; -2) \cup (-2, 2) \cup (2; +\infty)$

② proprietà funzione

$f(-x) = \frac{|(-x^2-1)|}{|-x|-2} = \frac{x^2-1}{|x|-2} = f(x) \Rightarrow$ pari

Studio solo $x \geq 0$, per $x < 0$ uso la riflessione rispetto all'asse y
$\mathcal{D}f$ è simmetrico rispetto ad O(origine)

$f(x) = f(-x) \to$ pari
$f(x) = -f(-x) \to$ dispari

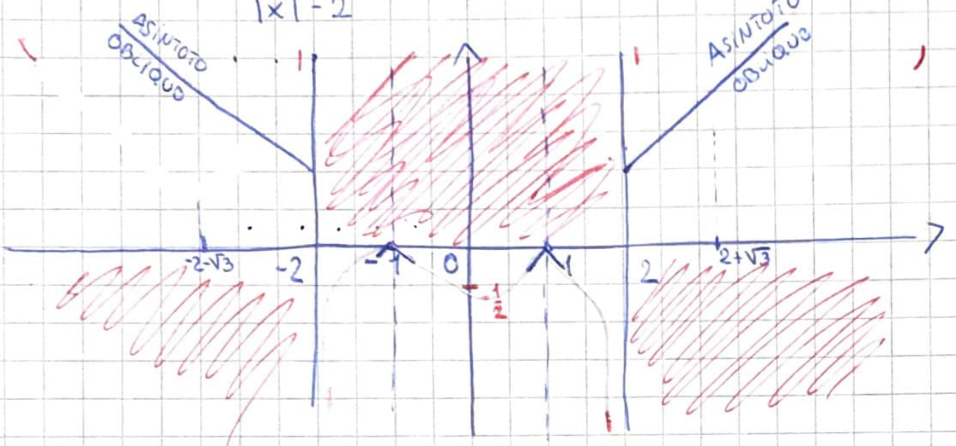
③ Zeri e segno di f

$f(x) = 0 \Rightarrow |x^2-1| = 0 \to x = \pm 1$
$f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{|x^2-1|}{|x|-2} \geq 0 \to |x|-2 > 0 \to x < -2 \vee x > 2$

cancello la parte positiva   cancello la parte negativa

$x = -1$ e $x = 1$ massimo relativo

$2+\sqrt{3}$ è un punto di minimo
$-2-\sqrt{3}$ (guardare STEP 8)



④ Limiti e continuità

f è continua su $\mathcal{D}f$ - composizione e quoziente di funzioni continue

Essendo pari, posso studiare la metà dei limiti e poi ribaltare il grafico

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}(1-\frac{1}{x^2})}{\cancel{x}(1-2/x)} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = +\infty$ $x = 2^+$ asintoto verticale destro

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty$ $x = 2^-$ asintoto verticale sinistro

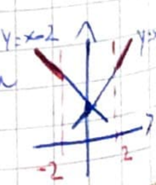
} asintoto verticale $x=2$

⑤ Asintoto obliquo $y = mx+q$

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x(x-2)} = 1$ (se esiste $m \in \mathbb{R} \neq 0$, calcolo q)

$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x-2} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+2x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2$

ASINTOTO OBLIQUO $y = 1x+2$ Per la simmetria, se abbiamo anche a $-\infty$



6) Asintotici per gli 0 zeri $f(x)$ $x_0 = 1$ $x_0 = -1$

Per $x \to 1$
$x \to -1$

si annulla

$$\underset{x \to 1}{f(x)} = \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{|x|-2} \sim \frac{2|x-1|}{-1} = -2|x-1|$$

si annulla

$$\underset{x \to -1}{f(x)} = \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{|x|-2} \sim \frac{2|x+1|}{-1} \sim -2|x+1|$$ (Sostituisco gli zeri nella $f(x)$)

Ci dice a cosa è simile la nostra funzione nell'intorno degli 0 "zeri" (nel nostro caso ± 1)
punti angolosi
e non derivabili

Non sempre è possibile calcolarli.

7) Derivabilità → Posso calcolarla in tutti i punti tranne $x \neq \pm 1$

$f'(x)$ per $x > 2$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2} \to f'(x) = \dfrac{2x(x-2) - (x^2-1)}{(x-2)^2} \to f'(x) = \dfrac{2x^2-4x-x^2+1}{(x-2)^2} \Rightarrow$

$f'(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

$f'(x)$ per $1 < x < 2$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2} \to f'(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

$f'(x)$ per $0 \leq x < 1$ $\quad f(x) = \dfrac{1-x^2}{x-2} = \dfrac{-2x(x-2) - (1-x^2)}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

Gli intervalli li trovo guardando il grafico. Posso anche calcolare un'unica derivata.

$$f'(x) = \frac{d(|x^2-1|) \cdot (|x|-2) - |x^2-1| \cdot d(|x|-2)}{(|x|-2)^2}$$

$d(|x|) = \dfrac{x}{|x|}$

$d(|x^2-1|) = \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|} \cdot 2x$

$x_0 = 1$ $\quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(0)}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|(1+h)^2-1|}{+h-2} \cdot \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|h^2+2h|}{h^2-2h} = -1$ (è un infinitesimo, guardo l'esponente minore)

$\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|(1+h)^2-1|}{-h-2} \cdot \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|h^2+2h|}{-h^2-2h} = 1$ ANALOGO AL PUNTO 5

PUNTO DI NON DERIVABILITÀ

Siccome è pari, è analogo anche con $x_0 = -1$

(8) Punti stazionari $f'(x) = 0$ $\quad \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} = 0 \quad , \quad \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

Ne guardo solo 1 perché si comportano nello stesso modo

$x^2-4x+1=0$

$x^2-4x+4=3$

$(x-2)^2=3 \rightarrow x = 2+\sqrt{3}$ minimo

$x = 2-\sqrt{3}$

per la simmetria pari della funzione, anche $-2-\sqrt{3}$ é un minimo

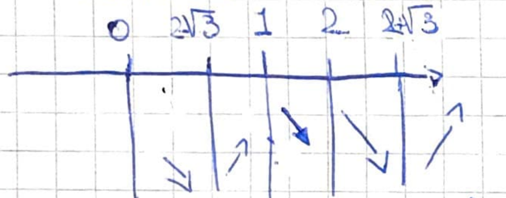
(9) Monotonia $f'(x) \geq 0 \rightarrow f$ é crescente

$0 \leq x < 1$

$1 < x < 2$

$x > 2$

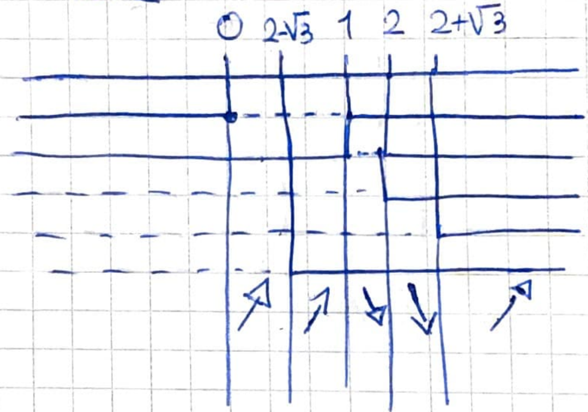
$0 \leq x < 2 \qquad x > 2$



$x=0$ minimo

poiché é pari e quindi devo ribaltarla dall'altro lato

$x = 2+\sqrt{3}$ minimo



$f(x) = x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2}$

① Dominio $|x| \neq 0$ $\forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

② PROPRIETÀ

$f(-x) = -x\sqrt[3]{(\ln|-x|)^2} = -x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = -f(x)$ dispari $\to$ simmetrica rispetto all'origine
studio solo $x > 0$

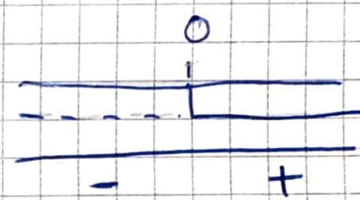
③ Studio zeri e segni

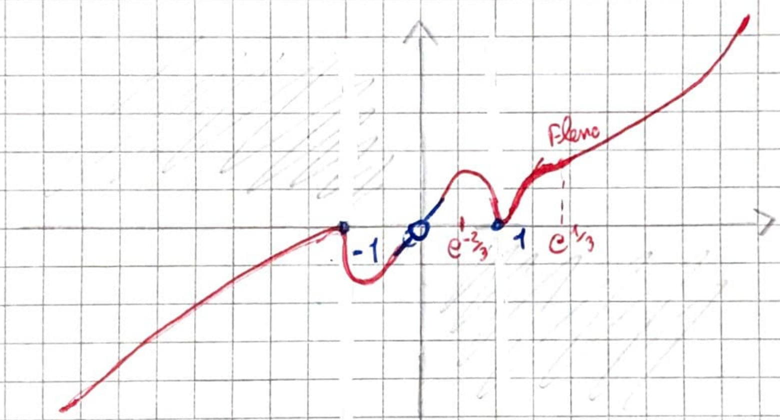
$f(x) = 0$ $x = 0$ $\vee$ $\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = 0 \to e^{\ln|x|} = e^0 \to |x| = 1 \to x = \pm 1$

non accettabile
fuori dal dominio

$f(x) \geq 0$ $x > 0$

$\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (c'è il quadrato)





$x = 1$ minimo
$x = -1$ massimo
relativi

④ Limiti e continuità f è continua in $\mathbb{R} - \{0\} \to$ nel suo dominio (composizione f continua)

$\lim_{x \to +\infty} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln(x)^{-2/3}} = 0^+$

$\ln 0 = -\infty$
$(\ln 0)^2 = +\infty$

tende a 0^+

f è prolungabile per continuità in $x = 0$

$$f = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è continua in 0

⑤ Asintoti obliqui $y = mx + q$

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{(\ln|x|)^2}}{\cancel{x}} = +\infty$ (non ci sono asintoti obliqui) né a $+\infty$ né a $-\infty$

~~derivabilità~~

$\cancel{f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} & x > 0 \\ x\sqrt[3]{\ln(-x)^2} & x < 0 \end{cases}}$

⑥ Asintotici per gli 0 zeri $x_0 = 1$ $x_0 = -1$

$x_0 = 1$ $f(x) = x\sqrt[3]{(\ln(x))^2} \sim \sqrt[3]{(\ln(x))^2} \sim (x-1)^{2/3}$
per $x \to 1$

$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) = \ln[1 + (x-1)] \sim (x-1)$

Analogo per $x_0 = -1$

(7) Derivabilità $f(x) \begin{cases} x\sqrt[3]{(\ln(x))^2} & x>0 \\ x\sqrt[3]{(\ln(x))^2} & x<0 \end{cases}$

Cuspide, poiché tendono ad ∞ con lo stesso segno. Punti di non derivabilità

$$f'(x) = \sqrt[3]{(\ln|x|)^2} + \cancel{x}\,\frac{2}{3}(\ln(x))^{-1/3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \sqrt[3]{(\ln|x|)^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\ln(x)}} = \boxed{\frac{\ln(x)+2/3}{\sqrt[3]{\ln(x)}}} \quad x>0$$

Dominio di f' $\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} \neq 0 \to e^{\ln|x|} \neq e^0 \to |x| \neq e^0 \to |x| \neq 1 \to x \neq \pm 1$

Non derivabilità

$$x_0 = 1 \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{[\ln(1+h)]^2}\,(h+1) - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h+1)[\ln(1+h)]^{2/3}}{(h)^{1/3}\,(h)^{2/3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h+1}{h^{1/3}}\underbrace{\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]^{2/3}}_{\text{tende a } 1} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h+1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

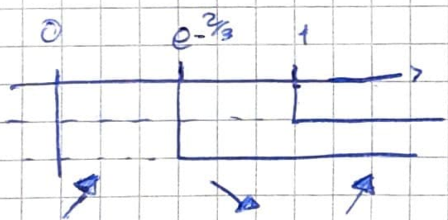
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{h+1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

$x_0 = 1$ non derivabilità, limite destro e sinistro sono diversi.

(8) Punti stazionari $f'(x) = 0$ $\ln(x) + \frac{2}{3} = 0$ $e^{\ln(x)} = e^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x = e^{-2/3}$

$x = -e^{2/3}$ per simmetria

(9) Monotonia f monotona $f'(x) > 0$ $\frac{\ln(x)+2/3}{\sqrt[3]{\ln x}} \geq 0$ $N \geq 0$ $\ln|x| + 2/3 \geq 0$ $x \geq e^{-2/3}$



$f'(x) \geq 0 \to$ crescente

$D > 0$ $e^{\ln(x)} > e^0 \Rightarrow x > e^0 \to x > 1$

$x = e^{-2/3}$ massimo locale

$x = 1$ minimo locale

(10) Derivata seconda solo di $x > 0$ per via della simmetria $f'(x) = \frac{\ln x + \frac{2}{3}}{\ln(x)^{1/3}}$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(x)^{1/3} - \left(\ln x + \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}[\ln(x)]^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^{2/3}}$$

$$= \frac{\ln(x) - \frac{1}{3}\ln x - 2/9}{x(\ln(x))^{4/3}} = \frac{\frac{2}{3}\ln(x) - \frac{2}{9}}{x[\ln(x)]^{4/3}}$$

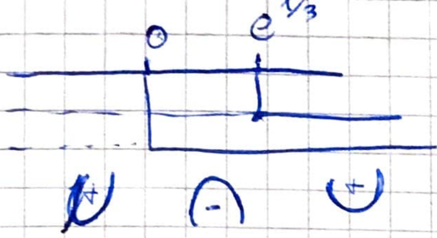
$D f''(x)$ $x \neq 0$ $e^{\ln(x)} \neq e^0 \to x \neq e^0 \to x \neq 1$ (già studiata nella derivata prima)

(11) Zeri e segni di $f'' \to$ concavità $\frown$ e convessità $\smile$ $f''(x) = 0$

$\frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9} = 0$ $e^{\ln(x)} = e^{\frac{1}{3}}$ $x = e^{1/3}$ per simmetria dispari $x = -e^{+1/3}$

$f''(x) \geq 0$ $\frac{\frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9}}{x(\ln x)^{4/3}} \geq 0 \Rightarrow$ $N \geq 0 \to \frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9} \geq 0 \to x \geq e^{1/3}$

$D > 0 \to x > 0$



$f''(x) \geq 0 \to f$ ha concavitá verso l'alto

f $x = e^{1/3}$ é un flesso (punto dove cambia la concavitá)